



MÉMOIRE DE RECHERCHE

Master Informatique 2^{ème} année
specialité Algorithmes et Méthodes Formelles

Préaffectation de sommets dans les graphes arbitrairement partitionnables

Julien Bensmail

Dirigé par Olivier Baudon

JUIN 2011

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier vivement Olivier Baudon pour la qualité de son encadrement tout au long de cette année universitaire. Il a en effet su orienter mes recherches tout en m'accordant une grande liberté, ce qui m'a permis de découvrir de nombreuses choses et de ressortir considérablement enrichi de ces quatre mois de stage. Je le remercie également pour sa bonne humeur et ses anecdotes sur le monde de la recherche qui ont rendu ce séjour au LaBRI très agréable. Enfin, merci également pour sa disponibilité, et plus particulièrement pour ses relectures minutieuses qui m'ont permis de grandement améliorer ce manuscrit.

Je tiens à remercier Éric Sopéna pour sa disponibilité et ses conseils avisés concernant ma poursuite d'études. De plus, je n'aurais peut-être jamais connu la joie de partitionner des graphes s'il n'avait pas été là !

Je voudrais également adresser de chaleureux remerciements à Bruno Courcelle pour avoir pris le temps de parcourir ce mémoire. Celui-ci serait certainement de moindre qualité sans ses conseils judicieux.

Enfin, j'ai une pensée pour toute ma famille et tous mes amis pour leur soutien sans faille tout au long de ces cinq années d'étude, en espérant que ce travail constituera mes premiers pas dans le monde de la recherche et non les derniers.

Résumé

Un graphe G d'ordre n est dit *arbitrairement partitionnable* si pour toute partition (τ_1, \dots, τ_k) de n , il est possible de partitionner les sommets de G en k sous-ensembles (V_1, \dots, V_k) de sorte que $\forall i \in [1, k]$, le sous-graphe de G induit par V_i soit connexe et d'ordre τ_i . Ce mémoire s'intéresse principalement à une version forte de la partition arbitraire, dite *avec une préaffectation*, dans laquelle il est possible de forcer la présence d'un sommet arbitraire de G au sein d'un sous-ensemble de la partition de ses sommets dont la taille a été préalablement choisie. Les graphes arbitrairement partitionnables de cette manière étant biconnexes, nous étudions également la partition arbitraire des graphes dotés de cette propriété en nous focalisant notamment sur ceux constructibles par le biais d'un produit cartésien de deux graphes arbitrairement partitionnables.

Abstract

A graph G of order n is said *arbitrarily partitionable* if for any partition (τ_1, \dots, τ_k) of n , it exists a partition of the vertex set of G into k subsets (V_1, \dots, V_k) such that $\forall i \in [1, k]$, the subgraph of G induced by V_i is connected and with order τ_i . This report deals mainly with a stronger version of arbitrary partitionability, said *with one preaffecting*, which allows us to force the membership of an arbitrary vertex of G into a particular subset of its vertex partition whose size has been chosen beforehand. Because the graphs which are arbitrarily partitionable by this way are 2-connected, we also study arbitrary partitionability of 2-connected graphs, focusing mainly on those which can be built via a cartesian product of two arbitrarily partitionable graphs.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 5 |
| 1 Définitions et résultats antérieurs | 9 |
| 1.1 Définitions et terminologie | 9 |
| 1.1.1 Rappels de théorie des graphes | 9 |
| 1.1.2 Familles de graphes | 11 |
| 1.1.3 Séquences et partition arbitraire d'un graphe | 12 |
| 1.1.4 Partition arbitraire avec contraintes | 13 |
| 1.2 Résultats antérieurs sur la partition arbitraire | 14 |
| 2 Partition arbitraire et préaffectation d'un sommet | 17 |
| 2.1 Définitions et premières caractéristiques | 18 |
| 2.2 Sur l'existence de graphes AP+1 | 20 |
| 2.2.1 Cas des graphes hamiltoniens | 20 |
| 2.2.2 Simplifier la vérification du caractère AP+1 d'un graphe | 21 |
| 2.2.3 Une classe infinie de graphes AP+1 non hamiltoniens | 25 |
| 2.3 Relation avec les différentes versions de la partition arbitraire | 31 |
| 2.4 Étude de la classe des ballons | 33 |
| 2.4.1 Premières caractéristiques des ballons AP+1 | 33 |
| 2.4.2 Éviction d'ensembles de petits 4-ballons n'étant pas AP+1 | 36 |
| 2.4.3 Conditions nécessaires sur la longueur des branches des 4-ballons AP+1 | 39 |
| 2.5 À propos de la préaffectation de $k \geq 2$ sommets | 43 |
| 2.5.1 Définitions et généralités | 43 |
| 2.5.2 Une classe de graphes AP+2 | 44 |
| 2.6 Conclusion | 48 |
| 3 Partition arbitraire et 2-connexité | 49 |
| 3.1 Résultats généraux sur les graphes AP 2-connexes | 49 |
| 3.2 Sur l'existence de 4-ballons AP non R-AP | 53 |
| 3.3 Graphes admettant une décomposition en deux oreilles | 55 |

| | | |
|---|---|-----------|
| 3.3.1 | Cas où les deux oreilles ont une seule extrémité commune | 56 |
| 3.3.2 | Cas où les deux oreilles n'ont aucune extrémité commune | 58 |
| 3.4 | Graphes constructibles par produit cartésien $G_{\square}P_l$ | 60 |
| 3.4.1 | Cas où G est traçable | 61 |
| 3.4.2 | Cas où G est AP+1 et non traçable | 61 |
| 3.4.3 | Cas où G est R-AP, non traçable et non AP+1 | 63 |
| 3.4.4 | Cas où G est AP, non traçable, non AP+1 et non R-AP | 67 |
| 3.4.5 | À propos de la récursivité de la partition arbitraire de $G_{\square}P_2$ | 74 |
| 3.5 | Conclusion | 76 |
| Conclusion générale et perspectives | | 79 |
| A Algorithmes de vérification de la partition arbitraire | | 81 |
| A.1 | Cas des 3-podes | 81 |
| A.2 | Cas des 4-podes | 83 |
| A.3 | Cas des 4-ballons | 86 |
| Bibliographie | | 88 |

Introduction

La décomposition de graphes en sous-graphes disjoints possédant des propriétés bien particulières est l'une des problématiques les plus récurrentes de la théorie des graphes. Maintes fois étudiée, la question de la k -coloration d'un graphe G quelconque, dont le but est de déterminer si l'on peut partitionner les sommets de ce dernier en k sous-ensembles de sorte que les k sous-graphes qu'ils induisent soient des stables, en est sans doute l'illustration la plus connue. Si ces problèmes de décomposition sont intéressants d'un point de vue scientifique, ils offrent également de nombreuses applications concrètes, notamment dans le domaine du partage de ressources ; c'est pourquoi beaucoup de travaux leur sont consacrés.

Le problème de décomposition sur lequel nous nous sommes penchés est la *partition arbitraire en sous-graphes connexes*, version dans laquelle les sous-graphes induits doivent respecter des contraintes de taille et de connexité. Formellement, étant donné un graphe G d'ordre n et une partition $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ de n , τ est dite *réalisable dans G* s'il est possible de partitionner V en k sous-ensembles (V_1, \dots, V_k) de sorte que $\forall i \in [1, k]$, le sous-graphe induit par V_i soit connexe et d'ordre τ_i . G est dit *arbitrairement partitionnable* (AP en abrégé) si toute partition de n y est réalisable.

La notion de graphe AP est très récente puisqu'elle n'a été introduite¹ qu'en 2002 par Barth et al. [1]. Mais le fait de décomposer des graphes en composantes connexes disjointes avait déjà fait l'objet de recherches par le passé. L'un des exemples les plus représentatifs est une conjecture soulevée en 1975 par Frank lors d'un colloque de combinatoire à Aberdeen, qui a depuis été indépendamment résolue par Györi [10] et Lovász [15], dont l'énoncé est le suivant :

Théorème :

Soient G un graphe k -connexe, une partition (τ_1, \dots, τ_k) de n , et k sommets distincts v_1, \dots, v_k de G . Il est toujours possible de partitionner V en k sous-ensembles (V_1, \dots, V_k) de sorte que $\forall i \in [1, k]$, le sous-graphe induit par V_i soit connexe, d'ordre τ_i , et contienne le sommet v_i .

Outre l'analogie avec un problème de partage de ressources entre plusieurs utilisateurs, la notion de partition arbitraire est également très proche de concepts importants de la théorie des graphes. Il est par exemple toujours possible d'exhiber un couplage parfait d'un graphe AP (ou quasi-parfait si son ordre est impair), la propriété d'être AP s'inscrivant alors comme une nouvelle condition suffisante pour qu'un graphe possède un tel couplage. Un autre exemple encore plus intéressant vient du fait que les graphes traçables² sont toujours AP. L'hamiltonicité étant, aujourd'hui encore, une notion de la théorie des graphes sujette à de nombreuses interrogations, il est probable que les travaux autour de la partition arbitraire puissent aider à faire avancer les investigations autour de ce sujet, et inversement. En guise d'illustration, on citera notamment

1. La partition arbitraire de sommets était alors connue sous le nom de *décomposition arbitraire de sommets*, nom prêtant à confusion car proche d'autres notions de théorie des graphes.

2. Un graphe *traçable* est un graphe contenant une chaîne hamiltonienne, c'est-à-dire passant une et une seule fois par chacun de ses sommets.

un résultat de Marczyk qui a exhibé une condition suffisante pour la partition arbitraire d'un graphe affaibli de celle de Ore pour l'hamiltonicité [16].

Malheureusement, il est difficile, au même titre que pour la majorité des autres problèmes de décomposition, de déterminer si un graphe G d'ordre n est AP ou non. En effet, ne connaissant toujours pas la complexité de ce problème, nous sommes obligés, pour cela, de nous assurer que toute partition de n est bien réalisable dans G . Or, vérifier cela pour une seule d'entre elles étant un problème NP-complet [19], inutile de préciser que la vérification exhaustive dans son intégralité s'avère compliquée lorsque l'on sait que le nombre de partitions d'un entier est exponentiel en la taille de celui-ci³ [8].

Du fait de cette complexité, une grande partie des recherches réalisées sur la partition arbitraire concerne la famille des arbres. Si l'absence de cycle dans la structure de ces graphes limite les possibilités d'y réaliser une partition, la principale motivation derrière ces travaux est en réalité liée au fait que le caractère AP d'un graphe est clos par ajout d'arêtes. Autrement dit, exhiber un maximum d'arbres AP pour leur ajouter des arêtes apparaît comme une méthode simple pour construire de nombreux autres graphes AP.

Les arbres AP ont ainsi été étudiés relativement à certains critères, notamment celui de leur degré maximum. En 2003, Horňák et Woźniak ont commencé par prouver que les arbres AP sont de degré maximum au plus 6 [12]. Cependant, leur preuve n'était pas constructive et ne permettait pas d'identifier de tels arbres de degré maximum 4, 5 ou 6. Leur résultat a été amélioré en 2006 par Barth et Fournier qui ont abaissé ce majorant à 4, prouvant par la même occasion que cette borne est optimale [2].

Par la suite, il a été découvert qu'il n'est en réalité pas possible d'obtenir l'intégralité des graphes AP en ajoutant des arêtes dans les arbres AP du fait de l'existence de graphes AP ne pouvant pas être obtenus de cette manière [17, 9]. C'est dans ce contexte qu'ont été introduits les graphes dits *arbitrairement partitionnables minimaux*, graphes AP dans lesquels toute suppression d'arête entraîne une perte de leur partition arbitraire, l'intérêt étant d'essayer de les caractériser au maximum afin de s'en servir comme graphes de base pour la construction par ajout d'arêtes. De premiers majorants les concernant ont ainsi été donnés par Ravoux, concernant notamment leur nombre d'arêtes ainsi que leur degré maximum [17].

Parallèlement à l'étude des arbres AP et des graphes minimaux pour la partition arbitraire, de nouvelles versions plus contraignantes de la partition arbitraire ont été introduites :

- La première, dite *à la volée* (OL-AP en abrégé⁴), caractérise le fait que les sous-ensembles de sommets composant la réalisation d'une partition dans un graphe peuvent toujours être choisis séquentiellement, en suivant l'ordre des éléments de celle-ci, et ce sans tenir compte de la taille des prochains sous-ensembles à choisir. Autrement dit, il n'est pas possible, dans cette version, d'analyser une partition dans son intégralité afin d'éventuellement identifier des sous-ensembles de sommets évidents pour sa réalisation. Parmi les résultats intéressants connus concernant cette version à la volée de la partition arbitraire, on retiendra notamment l'identification complète des arbres OL-AP que l'on doit à Woźniak et al. [11].
- Enfin, des versions *récurives* ajoutent, elles, des contraintes sur la réalisation des partitions dans un graphe. Plus précisément, en plus de chercher à obtenir des sous-graphes induits satisfaisant les contraintes de taille et de connexité habituelles, on souhaite également que ces derniers soient AP eux-mêmes. Deux variantes, l'une faible et l'autre forte, ont

3. Le nombre de partitions différentes d'un entier n est de $\frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}})$.

4. Du terme anglais *online*.

été introduites [4] ; la première a été étudiée dans le cadre de certaines classes de graphes comme les arbres ou les ballons, tandis que la seconde a été complètement caractérisée grâce à l'utilisation d'un résultat sur l'hamiltonicité.

L'un des principaux intérêts de ces versions est que, du fait des contraintes supplémentaires qu'elles imposent, il est souvent plus facile de déterminer qu'un graphe est "plus qu'AP" que simplement AP. En effet, nous disposons pour celles-ci de techniques de preuve autrement plus souples que la démarche classique consistant à répéter exhaustivement la même procédure pour toutes les partitions d'un entier. Mais malheureusement, ces mécanismes sont, dans certains cas, inutilisables du fait qu'il existe des graphes étant AP mais pas davantage ; pour ceux-ci, il n'existe alors pas d'alternative intéressante à la vérification exhaustive pour prouver leur partition arbitraire.

Les résultats décrits dans ce mémoire s'inscrivent dans la continuité de ces recherches.

Après avoir présenté, dans le chapitre 1, quelques résultats sur la partition arbitraire nécessaires à la compréhension de nos travaux, nous introduirons, dans le chapitre 2, une nouvelle version de la partition arbitraire, dite *avec k préaffectations*⁵ (AP+ k en abrégé), dans laquelle k sommets arbitraires d'un graphe peuvent être affectés à k sous-ensembles distincts de la réalisation d'une partition dans celui-ci dont les tailles ont été préalablement choisies. Nous nous intéresserons principalement au cas des graphes AP+1 : après avoir discerné qu'une caractéristique de ces graphes est la 2-connexité, nous montrerons l'existence d'une infinité d'entre eux et étudierons plus particulièrement le cas des ballons, qui constituent la classe de graphes biconnexes la plus connue actuellement dans le cadre de la partition arbitraire. Convaincus de l'existence de graphes AP+1, nous présenterons ensuite des éléments permettant de situer la partition arbitraire avec une préaffectation dans la hiérarchie des versions de la partition arbitraire déjà établie [4]. Enfin, nous finirons ce chapitre en mettant en évidence quelques caractéristiques générales des graphes AP+ k , où $k \geq 2$ est un entier quelconque.

Le fait que les graphes AP+1 soient 2-connexes est problématique puisque nous connaissons mal la relation entre cette propriété et la partition arbitraire, les graphes les plus étudiés jusqu'à maintenant pour cette dernière notion étant les arbres. Afin de commencer à éclaircir les choses, nous nous pencherons donc, dans le chapitre 3, sur la partition arbitraire des graphes biconnexes. Nous étudierons notamment le cas de quelques classes de graphes 2-connexes pouvant être obtenus au moyen de constructions classiques de la théorie des graphes ; en particulier, nous donnerons quelques résultats concernant la compatibilité entre les notions de partition arbitraire et de produit cartésien de graphes.

5. La paternité de cette notion revient à Woźniak.

Chapitre 1

Définitions et résultats antérieurs

Ce premier chapitre présente les différentes notions et résultats nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous commencerons par rappeler, dans la section 1.1, quelques définitions et résultats de base de la théorie des graphes avant de définir formellement la notion de partition arbitraire. Enfin, nous présenterons dans la section 1.2 les résultats antérieurs concernant les graphes arbitrairement partitionnables dont nous aurons besoin dans les prochains chapitres.

1.1 Définitions et terminologie

Nous commençons par présenter différents termes et notations importants que nous aurons l'occasion d'utiliser dans ce mémoire. Après de brefs rappels de quelques notions de théorie des graphes, nous nous attarderons plus spécifiquement sur le cas de la partition arbitraire de graphes.

Le but n'étant nullement de proposer une introduction complète au vaste domaine qu'est la théorie des graphes, nous invitons le lecteur à consulter un ouvrage spécialisé dans ce sujet, comme celui de Diestel [7], afin d'obtenir plus de détails sur toutes les notions de base non abordées ici.

1.1.1 Rappels de théorie des graphes

Nous traitons exclusivement de graphes connexes, non orientés et simples, c'est-à-dire sans boucles ni arêtes multiples¹. Un graphe G se définit au moyen de deux ensembles $V(G)$ et $E(G)$, contenant respectivement ses sommets et ses arêtes, appelés simplement V et E en l'absence d'ambiguïté. Étant donnés deux sommets adjacents u et v de G , l'arête reliant u à v est dénotée par uv . L'ordre de G , noté $n(G)$ ou simplement n lorsqu'il n'y a aucune confusion possible, est le nombre de ses sommets, c'est-à-dire $|V|$. Étant donné un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, nous notons $G[S]$ le sous-graphe de G induit par S .

Un sommet de degré d de G est parfois appelé un d -sommet. On parle alors de *sommet pendant* pour désigner un 1-sommet, de *sommet secondaire* pour un 2-sommet, ou encore de *sommet primaire* pour un sommet de degré $d \geq 3$.

1. La présence de ces deux types d'arêtes dans un graphe arbitrairement partitionnable est possible, mais n'apporte rien au moment de partitionner le graphe.

Si G contient une chaîne hamiltonienne, celui-ci est dit *traçable*. Enfin, le fait que G soit isomorphe à un graphe H est noté $G \simeq H$.

Il existe plusieurs définitions équivalentes de la notion de k -connexité, la plus couramment utilisée étant la suivante : *un graphe est dit k -connexe si toute suppression d'au plus $k - 1$ de ses sommets n'entraîne pas sa déconnexion*. Celle-ci n'est cependant pas la plus parlante puisqu'elle n'est pas celle illustrant le mieux en quoi un certain graphe est plus connexe qu'un autre. Une définition plus représentative est souvent utilisée, résultant d'un théorème de Menger :

Théorème 1 ([7], Théorème 3.3.6) :

Soit G un graphe, et u et v deux de ses sommets quelconques. Si G est k -connexe, alors il existe k chaînes disjointes reliant u à v dans G .

Étant donné un cycle C , le graphe G obtenu au moyen d'une *greffe d'oreille d'ordre p dans C* est le graphe obtenu en liant la première extrémité u_1 d'une chaîne d'ordre p à un sommet v_1 de C , et en faisant de même pour la seconde extrémité u_2 de la chaîne avec un sommet $v_2 \neq v_1$ de C . On dit de G qu'il admet une *décomposition en oreilles* s'il peut être obtenu en greffant une oreille d'ordre quelconque à un cycle ou à un graphe déjà construit de cette manière. Un exemple de graphe constructible de cette manière est visible sur la figure 1.1.

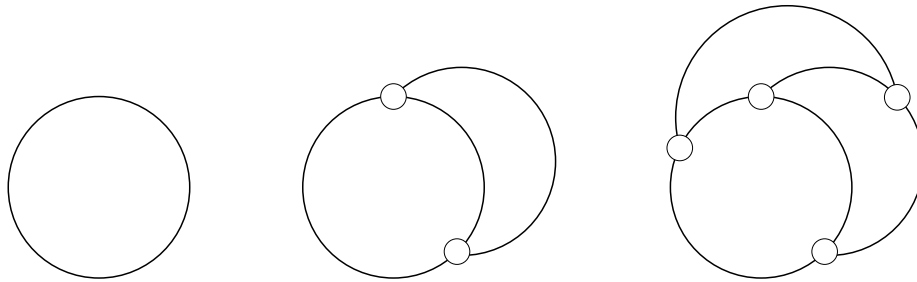


Figure 1.1 – Un exemple de greffes successives d'oreille

Enfin, le produit cartésien de deux graphes G et H , est le graphe $G \square H = (V_{\square}, E_{\square})$, où $V_{\square} = V(G) \times V(H)$ et $E_{\square} = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) / (u_1 = u_2 \text{ et } v_1 v_2 \in E(H)) \text{ ou } (v_1 = v_2 \text{ et } u_1 u_2 \in E(G))\}$. On se référera à la figure 1.2 pour avoir un exemple de graphe obtenu grâce à cette construction. Pour plus d'informations et de résultats sur celle-ci, on pourra se référer à un ouvrage spécialisé sur le sujet comme celui d'Imrich et Klavžar [13].

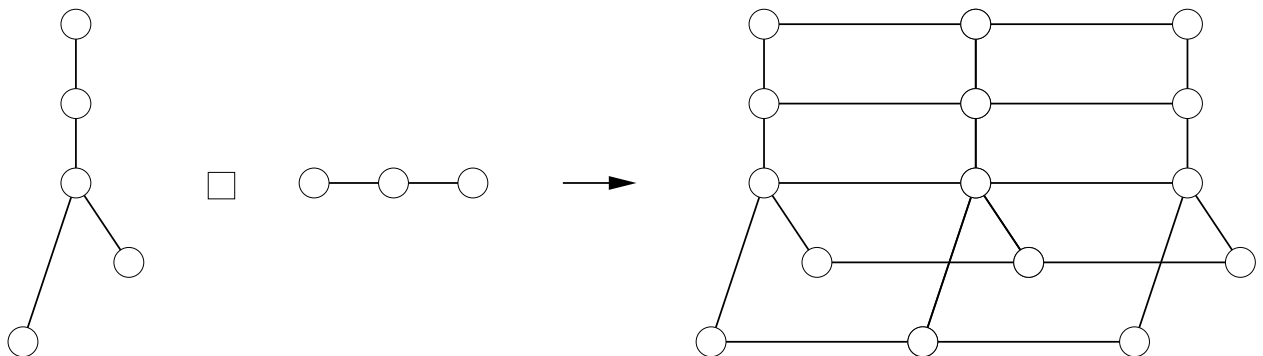


Figure 1.2 – Un exemple de produit cartésien de deux graphes

1.1.2 Familles de graphes

Une n -chaîne (resp. un n -cycle) est un graphe isomorphe à, P_n (resp. C_n), la chaîne (resp. le cycle) d'ordre n . La grille à r lignes et c colonnes est le graphe d'ordre rc résultant du produit cartésien $P_r \square P_c$.

Un *multipode* est un arbre contenant un unique nœud primaire. Plus précisément, si $a_1 \leq \dots \leq a_k$ sont des entiers positifs, avec $k \geq 3$, le k -pode $P(a_1, \dots, a_k)$ est l'arbre d'ordre $1 + \sum_{i=1}^k a_i$ obtenu en liant un nœud v à l'une des extrémités de k chaînes disjointes d'ordre respectif a_1, \dots, a_k . Le nœud v est appelé la *racine* du k -pode, tandis que les k chaînes qui lui sont liées sont ses *bras*.

Certains k -podes aux caractéristiques précises sont connus sous d'autres appellations. Le terme *tripode* est ainsi parfois utilisé pour parler d'un 3-pode. Lorsqu'un tel tripode $P(a_1, a_2, a_3)$ possède un bras de longueur 1 (c'est-à-dire lorsque $a_1 = 1$), on parle également de *chenille*², que l'on note alors $Cat(a_2 + 1, a_3 + 1)$. Un exemple de tripode est donné sur la figure 1.3.

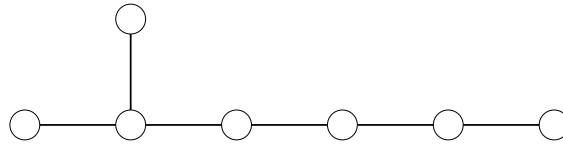


Figure 1.3 – Le tripode $P(1, 1, 4)$ / La chenille $Cat(2, 5)$

Soient $r_1 \leq \dots \leq r_k$ des entiers positifs, avec $k \geq 1$. Le *soleil* $Sun(r_1, \dots, r_k)$ à k rayons est le graphe d'ordre $2k + \sum_{i=1}^k r_i$ obtenu à partir du cycle d'ordre $k + \sum_{i=1}^k r_i$ (dont les sommets sont dénotés par $v_1, \dots, v_{k+\sum_{i=1}^k r_i}$) en reliant chacun de ses sommets v_j , où $j = l + \sum_{i=1}^l r_i$ pour un $l \in [1, k]$, à un nouveau sommet pendant. Un exemple de soleil est représenté sur la figure 1.4.

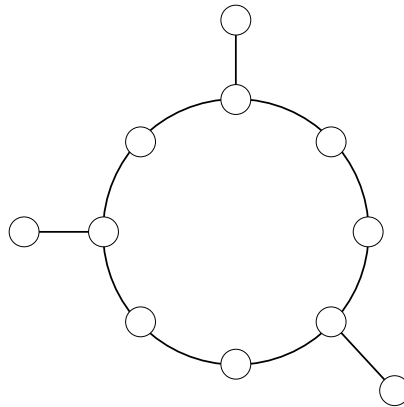


Figure 1.4 – Le soleil $Sun(1, 2, 2)$

Considérons $b_1 \leq \dots \leq b_k$ des entiers positifs avec $k \geq 2$. Le k -ballon $B(b_1, \dots, b_k)$ est le graphe obtenu en joignant l'une des extrémités de k chaînes disjointes de longueur respective b_1, \dots, b_k à un sommet r_1 et en faisant de même avec leur seconde extrémité et un sommet $r_2 \neq r_1$. Les sommets r_1 et r_2 sont appelés les *racines* du ballon, tandis que les k chaînes les

2. En théorie des graphes, une *chenille* désigne généralement un graphe possédant une chaîne principale à laquelle tous les sommets appartiennent ou sont adjacents.

reliant sont ses *branches*. Un k -ballon peut notamment être perçu comme un k -pode dont les extrémités des bras ont été fusionnées ou connectées à un nouveau sommet.

Étant donnés $k \geq 2$ entiers positifs $b_1 \leq \dots \leq b_k$ et un entier positif $p \geq 1$, le $(k+1)$ -ballon *partiel* $PB(p, b_1, \dots, b_k)$ est le graphe obtenu en liant l'une des extrémités d'une p -chaîne à l'une des deux racines du k -ballon $B(b_1, \dots, b_k)$.

De la même manière, grâce à $k \geq 2$ entiers positifs $b_1 \leq \dots \leq b_k$ et deux entiers $p_1 \geq 1$ et $p_2 \geq 1$, on définit le $(k+1)$ -ballon *sectionné* $CB(p_1, p_2, b_1, \dots, b_k)$ comme étant le graphe obtenu en joignant l'extrémité d'une p_1 -chaîne à l'une des racines du k -ballon $B(b_1, \dots, b_k)$ et en faisant de même avec sa seconde racine et l'une des extrémités d'une p_2 -chaîne.

Ces trois types de ballons sont très proches. En effet, il est possible de voir un k -ballon partiel ou un k -ballon sectionné comme un k -ballon classique auquel on aurait retiré une arête de l'une de ses branches. Ces trois types de graphes sont illustrés sur la figure 1.5.

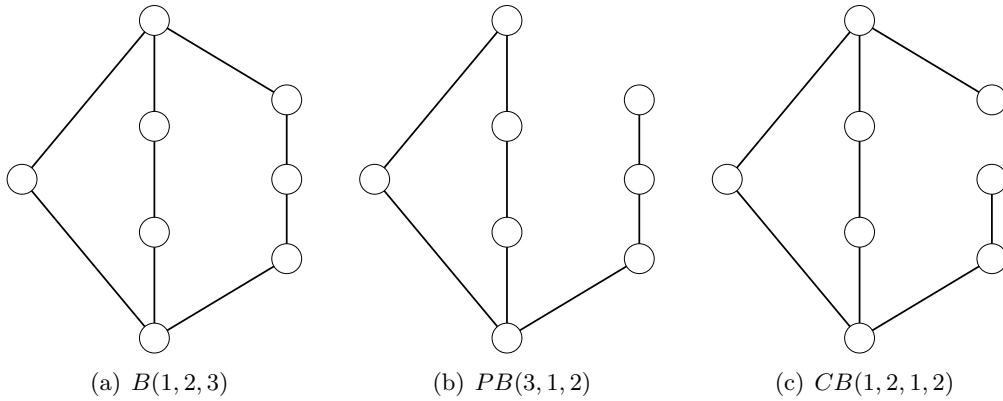


Figure 1.5 – Exemples de différents types de ballons

1.1.3 Séquences et partition arbitraire d'un graphe

Une *séquence* τ est un multi-ensemble ordonné (τ_1, \dots, τ_k) dans lequel $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_k$. k est appelé le *cardinal* de τ , et est noté $|\tau|$; la *norme* de τ , dénotée par $\|\tau\|$, est la somme de ses éléments, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^k \tau_i$. Étant donné un nombre quelconque n , on dit que τ est *admissible pour* n si $\|\tau\| = n$; dans cette situation, τ forme alors une partition de n . Pour un $l < n$ quelconque tel que $n \equiv 0 \pmod{l}$, la l -*séquence de* n est la séquence τ_l admissible pour n composée uniquement d'éléments l , à savoir $\tau_l = (l, \dots, l)$.

Par exemple, les séquences $\tau_1 = (5, 5)$ et $\tau_2 = (2, 2, 3, 3)$ sont toutes deux admissibles pour 10 mais sont de cardinal différent. On remarquera que τ_1 est une 5-séquence de 10.

Étant donné un graphe G et une séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$, τ est dite *réalisable dans* G si elle est admissible pour n , l'ordre de G , et qu'il est possible de partitionner V en k sous-ensembles (V_1, \dots, V_k) de sorte que $\forall i \in [1, k]$, $G[V_i]$ soit un sous-graphe connexe d'ordre τ_i de G . (V_1, \dots, V_k) forme alors une *réalisation de* τ dans G . Bien entendu, il peut exister plusieurs réalisations différentes d'une même séquence dans un graphe. Un exemple de réalisation est donné sur la figure 1.6.a.

Enfin, G est dit *arbitrairement partitionnable* (AP en abrégé) si toute séquence admissible pour son ordre y est réalisable. L'exemple typique de graphe non AP est la griffe³, dans laquelle

3. La *griffe* est le graphe isomorphe au tripode $P(1, 1, 1)$.

on ne peut en effet pas réaliser la séquence $(2, 2)$ (voir figure 1.6.b).

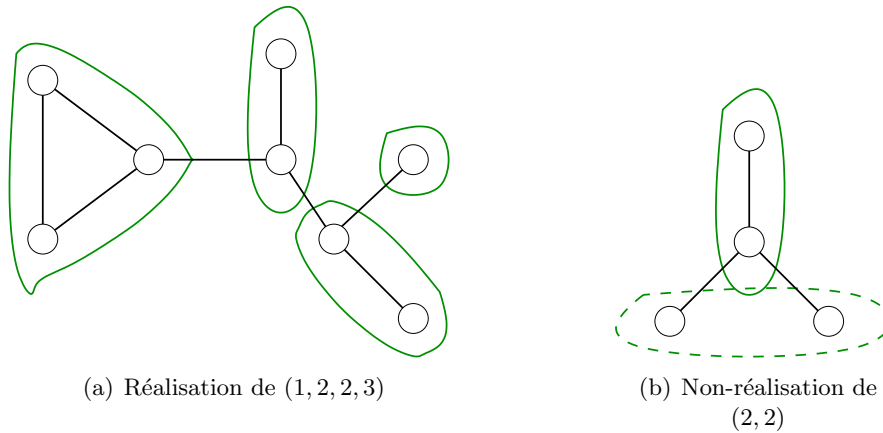


Figure 1.6 – Exemples de réalisations

1.1.4 Partition arbitraire avec contraintes

Dans la version classique de la partition arbitraire, les éléments d'une séquence τ sont intégralement connus au moment où l'on cherche à réaliser cette dernière dans un graphe G . Il est alors possible, et c'est ce qui est fait dans la majeure partie des cas, de tenir compte de l'intégralité de ceux-ci afin d'éventuellement trouver des sous-ensembles évidents de sommets de G pour certaines des tailles dictées par τ .

Woźniak et al. ont ainsi imaginé une nouvelle version de la partition arbitraire dans laquelle cette clairvoyance n'est plus permise puisque les éléments ne sont connus qu'au compte-gouttes [11]. Plus précisément, le premier élément de τ , τ_1 , est dévoilé et le premier sous-ensemble de sommets de G de la réalisation, V_1 , doit être choisi. Cela fait, le deuxième élément de τ , τ_2 , arrive à son tour et il faut alors trouver le sous-ensemble V_2 de la réalisation dans le graphe $G[V \setminus V_1]$, c'est-à-dire en tenant compte des sommets appartenant déjà à V_1 . Et ainsi de suite jusqu'à avoir trouvé autant de sous-ensembles de sommets que d'éléments composant τ .

Ainsi, dans cette version, lors du choix d'un sous-ensemble de sommets à l'arrivée d'un nouvel élément de la séquence, il y a une nécessité d'anticipation qui n'est pas présente dans la version classique de la partition arbitraire. Les graphes dans lesquels il est toujours possible de réaliser une séquence de cette manière sont dits *arbitrairement partitionnables à la volée* (OL-AP en abrégé).

Enfin, une version récursive de la partition arbitraire a également été définie [4], dans laquelle les séquences doivent être réalisées de manière à induire des sous-graphes AP eux-mêmes. Formellement, un graphe G est dit *récursivement arbitrairement partitionnable* (R-AP en abrégé) ssi :

- G est isomorphe à K_1 , le graphe composé d'un unique sommet,
ou
- pour toute séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ admissible pour n il existe une réalisation (V_1, \dots, V_k) de celle-ci dans G telle que $\forall i \in [1, k]$, $G[V_i]$ soit R-AP et d'ordre τ_i .

À noter qu'une version récursive forte de la partition arbitraire a également été introduite, mais les graphes possédant cette propriété ayant été complètement caractérisés [4], nous ne nous y intéresserons pas dans ce mémoire.

1.2 Résultats antérieurs sur la partition arbitraire

Les deux problèmes principaux que nous sommes amenés à traiter dans le cadre de la partition arbitraire sont les suivants :

SÉQUENCE RÉALISABLE

Instance : Un graphe G d'ordre n et une séquence τ admissible pour n .

Question : τ est-elle réalisable dans G ?

GRAPHE ARBITRAIREMENT PARTITIONNABLE

Instance : Un graphe G .

Question : G est-il arbitrairement partitionnable ?

Il a été montré que le problème SÉQUENCE RÉALISABLE est NP-complet, même restreint à la classe des arbres de degré maximum 3 [19]. En revanche, nous ne savons toujours rien sur le problème GRAPHE ARBITRAIREMENT PARTITIONNABLE, pas même s'il est NP-difficile. Cependant, si l'instance considérée de G est un 3-pode ou un 4-pode, alors il est possible de le résoudre en temps polynomial en son nombre de sommets [1, 2].

Du fait de la NP-complétude du problème SÉQUENCE RÉALISABLE, il n'est évidemment pas simple de vérifier si un graphe G est arbitrairement partitionnable puisque cela demande, par définition, de s'attaquer à ce problème pour toute séquence admissible pour n . Sachant que le nombre de telles séquences est exponentiel en la taille de n [8], cela devient rapidement ingérable ; de ce fait, plutôt que de vérifier cela exhaustivement, on préfère avoir recours à des méthodes plus simples parfois applicables.

Une première astuce se base sur le fait que la partition arbitraire d'un graphe est close par ajout d'arêtes :

Observation 1 :

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Si G est AP, alors $\forall uv \notin E$, le graphe $H = (V, E \cup \{uv\})$ est AP.

En effet, il est simple de voir qu'une réalisation dans G d'une séquence admissible pour n est valable dans H pour la même séquence. Une conséquence importante de cette propriété est la suivante :

Conséquence 1 :

Soit G un graphe. Si G possède un graphe partiel AP, alors G est AP.

Cette propriété est doublement intéressante. Premièrement, elle signifie qu'il est possible de construire de nombreux graphes AP en ajoutant des arêtes à un échantillon de graphes AP. Secondement, elle constitue une méthode de vérification de la partition arbitraire d'un graphe bien plus simple et rapide à utiliser que d'essayer d'y réaliser un nombre exponentiel de séquences.

On peut déduire une condition suffisante pour la partition arbitraire d'un graphe à partir de la Conséquence 1 et de l'observation suivante :

Observation 2 :

Soit P_n la chaîne d'ordre n quelconque. P_n est AP.

En effet, si nous dénotons par v_1, \dots, v_n les sommets de P_n et que nous considérons une séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ admissible pour n , il est facile de voir que $(\{v_1, \dots, v_{\tau_1}\}, \{v_{\tau_1+1}, \dots, v_{\tau_1+\tau_2}\}, \dots, \{v_{(\sum_{i=1}^{k-1} \tau_i)+1}, \dots, v_n\})$ est une réalisation de celle-ci dans P_n .

Conséquence 2 :

Soit G un graphe. Si G est traçable, alors G est AP.

Par définition, un graphe traçable d'ordre n est couvert par une n -chaîne qui est AP d'après l'Observation 2. De par l'Observation 1, G est donc AP, d'où la Conséquence 2 précédente.

D'après la Conséquence 1, si un graphe est couvert par un arbre qui est AP, alors il l'est lui aussi. Les arbres AP ont donc fait l'objet de nombreux travaux afin de caractériser leur degré maximum [2, 12]. Plus précisément, ces derniers étaient focalisés sur les multipodes AP du fait qu'il existe une relation entre ces derniers et les arbres AP. Le résultat le plus remarquable est le suivant :

Théorème 2 ([2]) :

Soit $P = P(a_1, \dots, a_k)$ un multipode. Si P est AP, alors $k \leq 4$ et $a_1 = 1$.

La conséquence directe de ce théorème est la suivante :

Conséquence 3 ([2]) :

Soit T un arbre. Si T est AP, alors $\Delta(T) \leq 4$ et tous ses 4-nœuds possèdent au moins une feuille dans leur voisinage.

Enfin, il a également été montré que pour prouver la partition arbitraire d'un arbre large, c'est-à-dire possédant un grand diamètre, il est possible de se limiter à étudier la réalisation dans celui-ci d'un ensemble restreint de séquences admissibles pour son ordre :

Théorème 3 ([18]) :

Soit T un arbre de diamètre $n - \alpha$, et τ une séquence admissible pour n . Si τ contient plus de α éléments distincts, alors τ est réalisable dans T .

Ce théorème garantit par exemple qu'il est possible, pour vérifier la partition arbitraire d'une chenille, de se limiter à étudier la réalisation dans celle-ci des séquences admissibles pour son ordre ne contenant qu'un élément distinct, c'est-à-dire les l -séquences de n où $n \equiv 0 \pmod{l}$.

Une autre méthode pour prouver qu'un graphe est AP est de montrer qu'il est "plus qu'AP", c'est-à-dire OL-AP ou R-AP. En effet, il a été montré que la hiérarchie suivante est vraie, dans laquelle $PM(n)$ dénote l'ensemble des graphes d'ordre n admettant un couplage parfait (ou quasi-parfait), $AP(n)$ celui des graphes AP d'ordre n , $OL-AP(n)$ celui des graphes OL-AP d'ordre n , $R-AP(n)$ celui des graphes R-AP d'ordre n , et $Traceable(n)$ celui des graphes traçables d'ordre n :

Théorème 4 ([4]) :

$$PM(n) \supseteq AP(n) \supseteq OL-AP(n) \supseteq R-AP(n) \supseteq Traceable(n)$$

L'avantage est qu'il est souvent bien plus simple de prouver qu'un graphe est fortement arbitrairement partitionnable que classiquement AP. Nous disposons en effet, pour ces différentes versions, de mécanismes de vérification autrement plus souples à utiliser que la démarche classique consistant à vérifier que l'intégralité des séquences admissibles pour l'ordre d'un graphe est bien réalisable dans celui-ci.

Nous passons donc en revue, ci-dessous, les résultats connus les plus intéressants vis-à-vis des graphes OL-AP et R-AP.

Pour prouver qu'un graphe G est OL-AP, on utilise généralement la remarque suivante qui permet d'éviter de vérifier que toutes les séquences admissibles pour l'ordre de G sont réalisables à la volée dans celui-ci :

Remarque 1 ([11]) :

Soit G un graphe. G est OL-AP ssi pour tout entier $q \in [1, n - 1]$ on peut trouver un sous-ensemble $S_q \subseteq V$ de sommets tel que $G[S_q]$ soit connexe d'ordre q et $G[V \setminus S_q]$ soit OL-AP.

Plusieurs classes de graphes ont été étudiées vis-à-vis de la partition arbitraire à la volée. Les arbres OL-AP, par exemple, ont été complètement caractérisés [11], ceux-ci ne pouvant alors qu'être isomorphes aux chaînes ou à certains tripodes. Des travaux ont également été menés sur les soleils, en qualité de graphes non arbres unicycliques, permettant de caractériser intégralement ceux étant OL-AP [14].

Il a été montré que les graphes R-AP sont très proches des OL-AP [4]; de ce fait, une méthode de vérification de la partition arbitraire récursive d'un graphe, encore plus souple que celle des OL-AP, peut être utilisée :

Remarque 2 ([4]) :

Soit G un graphe. G est R-AP ssi pour tout entier $q \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ on peut trouver un sous-ensemble $S_q \subseteq V$ de sommets tel que $G[S_q]$ soit R-AP d'ordre q et $G[V \setminus S_q]$ soit R-AP.

Du fait de cette proximité entre les graphes R-AP et les OL-AP, les arbres R-AP ont également été complètement caractérisés :

Théorème 5 ([4]) :

Soit T un arbre. T est R-AP ssi T est une chaîne, une chenille $Cat(a, b)$ dont les valeurs a et b sont données dans la table 1.1, ou le tripode $P(2, 4, 6)$.

Table 1.1 – Valeurs a et b , $b \geq a$, pour lesquelles $Cat(a, b)$ est R-AP

| a | b |
|------|------------------------|
| 2, 4 | $\equiv 1 \pmod{2}$ |
| 3 | $\equiv 1, 2 \pmod{3}$ |
| 5 | 6, 7, 9, 11, 14, 19 |
| 6 | 7 |
| 7 | 8, 9, 11, 13, 15 |

Les soleils R-AP ont, eux aussi, été intégralement identifiés [5]. Il a notamment été montré qu'un soleil R-AP ne peut pas posséder strictement plus de quatre rayons, et que s'il en possède moins, les sommets sur lesquels ces derniers sont attachés doivent être suffisamment espacés sur son cycle.

Enfin, les ballons, en tant que classe de graphes 2-connexes, ont également été étudiés vis-à-vis de la partition arbitraire récursive. Le résultat le plus intéressant vis-à-vis des ballons R-AP est la mise en évidence de l'existence d'un majorant au nombre de leurs branches, à savoir cinq [4], quand les ballons AP peuvent, eux, en posséder un nombre arbitraire [3].

Chapitre 2

Partition arbitraire et préaffectation d'un sommet

Lors de la réalisation d'une séquence τ dans un graphe G , il apparaît primordial de tenir compte de la topologie de ce dernier. En effet, les sommets d'un graphe n'ont pas tous la même importance vis-à-vis de la partition arbitraire, certains occupant une position plus "stratégique" que d'autres ; il convient alors de ne pas placer certains sommets de G dans les mauvais sous-ensembles si l'on souhaite obtenir une réalisation de τ dans celui-ci.

L'exemple le plus représentatif est celui de la réalisation d'une séquence de forme $(1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ dans un graphe quelconque. Dans un tel cas, on a tout intérêt à choisir un 1-sommet en tant que sous-ensemble de taille 1 plutôt qu'un sommet d'articulation, car cela aurait pour effet de déconnecter le graphe et donc d'empêcher probablement d'y réaliser le reste de la séquence (voir figure 2.1).

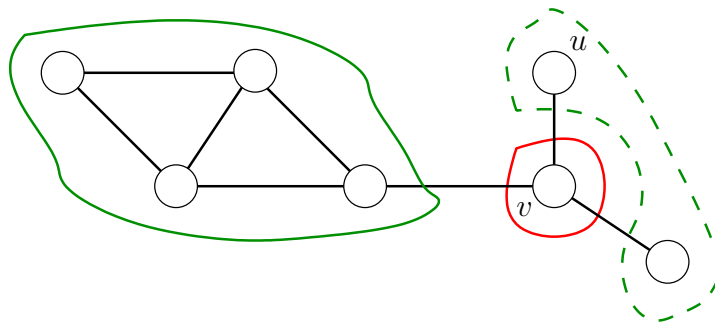


Figure 2.1 – Choix d'un sommet primaire en tant que sous-ensemble de taille 1 d'une réalisation

Ainsi, lors de la recherche d'un sous-ensemble de sommets de taille précise pour la réalisation d'une séquence dans un graphe, on peut être amené à devoir éviter à tout prix d'y inclure tel ou tel sommet de celui-ci.

De ce constat, une question vient alors à l'esprit : existe-t-il des graphes AP pour lesquels il est toujours possible de trouver une réalisation d'une séquence donnée telle que certains de leurs sommets arbitraires figurent dans les sous-ensembles de telle ou telle taille ? De tels graphes pourraient s'avérer très intéressants dans le contexte des réseaux que nous avons mentionné dans l'introduction. Imaginons par exemple que les ressources d'un réseau possèdent chacune des caractéristiques propres : un utilisateur pourrait très bien exiger la présence de l'une d'entre elles dans le sous-réseau qui va lui être attribué.

Nous nous sommes intéressés à une version forte de ces graphes, à savoir celle des graphes AP dans lesquels il est toujours possible de trouver k sous-ensembles de sommets (V_1, \dots, V_k) de taille arbitraire, où $k \leq n - 1$, induisant des graphes connexes, contenant chacun l'un de leurs sommets arbitraire, et tels que le reste du graphe soit AP. On parle alors de *partition arbitraire avec k préaffectations* (AP+ k en abrégé).

Ce chapitre se focalise principalement sur le cas où $k = 1$. Dans la section 2.1, nous commencerons par définir formellement le fait qu'un graphe soit arbitrairement partitionnable avec une préaffectation et mettrons en avant des conditions nécessaires pour qu'un graphe possède cette propriété. Celles-ci nous permettront ensuite de prouver l'existence de certains d'entre eux (section 2.2), ainsi que de nous pencher sur le cas de la classe des ballons (section 2.4). Convaincus de l'existence de graphes AP+1, nous apporterons, dans la section 2.3, des éléments permettant de situer cette version forte de la partition arbitraire dans la hiérarchie des versions déjà établie par le Théorème 4 (page 15).

Enfin, dans la section 2.5, nous quitterons brièvement le cas où $k = 1$ pour donner une définition plus générale de la notion de partition arbitraire avec préaffectations et exhiber quelques propriétés de celle-ci suggérées par l'étude des graphes AP+1 qui aura été menée dans les sections précédentes.

2.1 Définitions et premières caractéristiques

D'un point de vue purement intuitif, le problème de trouver k sous-ensembles disjoints de sommets d'un graphe induisant des sous-graphes connexes de telle ou telle taille, contenant chacun l'un de ses sommets arbitraire, et tels que le reste du graphe soit AP, est de plus en plus difficile à mesure que k grandit. De ce fait, dans le but d'une première approche, nous nous intéressons au cas où $k = 1$.

Nous allons commencer par définir formellement la notion de préaffectation de sommets dans un graphe. Pour cela, nous avons besoin d'une première définition portant sur le fait que l'on puisse trouver un sous-ensemble de sommets d'un graphe de n'importe quelle taille, induisant un sous-graphe connexe, et contenant un certain sommet du graphe, de sorte que le reste de celui-ci soit AP :

Définition 1 :

Soient G un graphe, v l'un de ses sommets, et $q \leq n - 1$ un entier. v est dit q -fixable dans G si on peut trouver un sous-ensemble $S_q \subseteq V$ tel que $v \in S_q$, $G[S_q]$ soit connexe d'ordre q , et $G[V \setminus S_q]$ soit AP.

En guise d'illustration, on peut considérer le graphe de la figure 2.1 précédente. Dans celui-ci, le sommet v n'est pas 1-fixable car le graphe restant résultant n'est pas connexe. En revanche, le sommet u y est bien 1-fixable car le graphe $G[V \setminus \{u\}]$ est traçable et donc AP d'après la Conséquence 2 (page 15).

L'intérêt d'avoir un sommet q -fixable dans un graphe pour de nombreuses valeurs de q est intéressant du point de vue de la partition arbitraire :

Observation 3 :

Soient G un graphe, et v l'un de ses sommets. Si v est q -fixable dans G pour tout $q \in [1, n - 1]$, alors G est AP.

En effet, si $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ est une séquence admissible pour n , une réalisation possible de celle-ci dans G est $S \cup R$, où S est un sous-ensemble de sommets permettant de τ_1 -fixer v dans G et R une réalisation de $\tau \setminus \{\tau_1\}$ dans $G[V \setminus S]$ qui est AP d'après la Définition 1.

De là, nous définissons enfin la notion nous intéressant, à savoir celle des graphes dans lesquels pour chaque sommet il existe un sous-ensemble de sommets de taille arbitraire le contenant et tel que le reste du graphe soit AP :

Définition 2 :

Soit G un graphe. G est dit *arbitrairement partitionnable avec une préaffectation* (AP+1 en abrégé) si tout sommet v de G est q -fixable dans celui-ci pour tout $q \in [1, n - 1]$.

L'exemple du sommet v de la figure 2.1 (page 17), qui est un sommet d'articulation du graphe, est un cas pathologique de type de sommets ne pouvant pas appartenir à un graphe AP+1 car non 1-fixables. De la non-présence de tels sommets dans ces graphes, on peut facilement formuler la relation suivante, dans laquelle $2CO(n)$ désigne l'ensemble des graphes 2-connexes d'ordre n et $AP+1(n)$ celui des graphes AP+1 d'ordre n :

Proposition 1 :

$$AP+1(n) \subsetneq AP(n) \cap 2CO(n)$$

Preuve :

L'inclusion de $AP+1(n)$ dans $AP(n)$ découle directement de l'Observation 3 (page 18). De plus, nous avons vu, par le biais de la figure 2.1 (page 17), qu'un graphe G contenant un sommet d'articulation v ne peut pas être AP+1 puisqu'y 1-fixer v implique que le graphe $G[V \setminus \{v\}]$ n'est pas connexe et donc pas AP. En conséquence, les graphes AP+1 sont nécessairement 2-connexes, d'où $AP+1(n) \subseteq 2CO(n)$.

Enfin, $AP+1(n) \neq AP(n) \cap 2CO(n)$ puisqu'il est possible de trouver des graphes AP 2-connexes n'étant pas AP+1. On peut par exemple considérer le cas du 3-ballon $B = B(1, 1, 1)$: celui-ci est bien 2-connexe, AP car traçable, mais il n'est pas AP+1. En effet, ses racines r_1 et r_2 ne sont pas 1-fixables dans celui-ci puisque les graphes $B[V \setminus \{r_1\}]$ et $B[V \setminus \{r_2\}]$ sont isomorphes à la griffe $K_{1,3}$ qui n'est pas AP (voir figure 2.2).

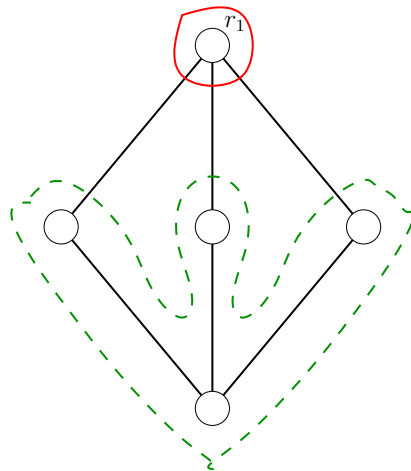


Figure 2.2 – Non 1-fixabilité des racines de $B(1, 1, 1)$ dans celui-ci

□

De ce lemme, on retiendra notamment qu'une condition nécessaire pour qu'un graphe soit arbitrairement partitionnable avec une préaffectation est la 2-connexité; de là, nous pouvons

donc en déduire que les arbres, qui constituent la famille de graphes la plus étudiée jusqu'à présent dans le cadre de la partition arbitraire, ne sont jamais AP+1.

2.2 Sur l'existence de graphes AP+1

Maintenant que nous avons formellement défini la notion de partition arbitraire avec une préaffectation et mis en évidence la biconnexité des graphes dotés de cette propriété, nous allons montrer que de tels graphes existent bien. Nous allons tout d'abord prouver que tous les graphes hamiltoniens sont trivialement AP+1, avant de présenter la famille des *cylindres* qui nous permettra de mieux comprendre la structure des graphes arbitrairement partitionnable avec une préaffectation.

2.2.1 Cas des graphes hamiltoniens

Nous avons vu qu'il est bien plus complexe de déterminer qu'un graphe est AP+1 que simplement AP. En effet, nous devons pour cela montrer que tous ses sommets sont q -fixables dans celui-ci pour tout $q \in [1, n - 1]$, ce qui demande de vérifier qu'au moins n sous-graphes sont bien AP à chaque fois. Ainsi, lorsque l'on cherche à prouver qu'un graphe est AP+1, le processus de vérification de la partition arbitraire classique est répété $\Omega(n^2)$ fois.

Du fait de ce degré de complexité supplémentaire, la vérification de la partition arbitraire avec une préaffectation d'un graphe est bien entendu très fastidieuse. Heureusement, la propriété de clôture des graphes AP par ajout d'arêtes (Conséquence 1 page 14) est adaptable aux graphes AP+1 :

Observation 4 :

Soit G un graphe. Si G possède un graphe partiel H AP+1, alors G est AP+1.

La preuve est similaire à celle de la Conséquence 1 (page 14). Pour q -fixer un sommet v de G dans ce dernier pour un q quelconque, il suffit de choisir le même sous-ensemble de sommets S_q que celui que l'on choisirait pour q -fixer v dans H . S_q étant valable dans H , il l'est bien dans G puisque l'ajout d'arêtes conserve la connexité ainsi que la partition arbitraire d'un graphe (Observation 1 page 14).

Ainsi, grâce à cette propriété des graphes AP+1, il suffit d'en trouver un seul pour pouvoir en construire beaucoup d'autres. Nous avons vu dans la section 1.2 qu'un grand nombre de graphes trivialement AP, tous les traçables, peut être obtenu en ajoutant des arêtes aux chaînes (Conséquence 2 page 15). Malheureusement, ces graphes ne sont pas toujours AP+1 car les chaînes ne le sont pas elles-mêmes dès qu'elles possèdent plus de deux sommets : il est en effet facile de voir qu'on ne peut pas y 1-fixer leurs sommets secondaires (voir figure 2.3).

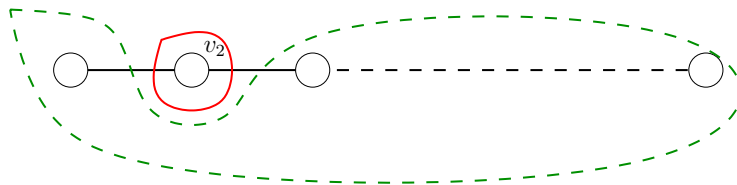


Figure 2.3 – Non 1-fixabilité des sommets secondaires de P_n dans celui-ci, $n \geq 3$

En revanche, les cycles n'ont pas ce problème puisqu'ils sont 2-connexes et qu'il est toujours possible d'y fixer des sommets, pour peu que l'on choisisse les sous-ensembles de sommets de la bonne manière :

Observation 5 :

Soit C_n le cycle d'ordre n quelconque. C_n est AP+1.

Preuve :

Dénotons les sommets de C_n par v_0, \dots, v_{n-1} . Pour montrer que C_n est AP+1, nous devons montrer que chacun de ses sommets est q -fixable dans celui-ci pour tout $q \in [1, n-1]$. Considérons alors, pour v_i l'un de ses sommets et q un entier entre 1 et $n-1$, le sous-ensemble de sommets $S_q = \{v_i, v_{(i+1) \bmod n}, \dots, v_{(i+q-1) \bmod n}\}$. Nous avons $v_i \in S_q$, $C_n[S_q]$ est une q -chaîne, et $C_n[V \setminus S_q]$ est une $(n-q)$ -chaîne qui est AP; le sommet v_i est donc bien q -fixable dans C_n . Ce choix de sous-ensemble de sommets fonctionnant pour tout sommet de C_n et tout entier q (voir figure 2.4), C_n est bien AP+1. \square

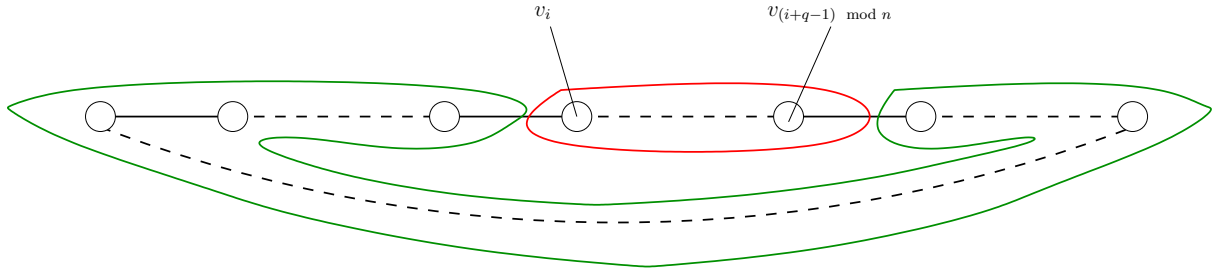


Figure 2.4 – Choix des S_q pour la fixabilité d'un sommet dans C_n

En combinant les deux dernières observations, il est immédiat que tout graphe couvert par un cycle est AP+1. Ainsi, il existe une infinité de graphes AP+1 triviaux, constructibles en ajoutant des arêtes dans les cycles :

Conséquence 4 :

Soit G un graphe. Si G est hamiltonien, alors G est AP+1.

2.2.2 Simplifier la vérification du caractère AP+1 d'un graphe

Nous avons, dans la section précédente, mis en évidence l'existence de graphes trivialement AP+1 ayant tous la particularité d'être hamiltoniens. Naturellement, on peut se poser la question de l'existence de graphes arbitrairement partitionnables avec une préaffectation non hamiltoniens.

Nous avons vu qu'une condition nécessaire devant être possédée par tous les graphes AP+1 est la 2-connexité (Proposition 1 page 19) ; or, cette propriété des graphes AP a été peu étudiée si l'on exclut la classe des ballons à laquelle une étude sera consacrée plus loin dans ce mémoire (section 2.4 page 33). Nous allons néanmoins montrer immédiatement qu'il existe des graphes AP+1 non hamiltoniens et n'étant pas des ballons.

Comme nous l'avons souligné, il est très fastidieux de vérifier que tous les sommets d'un graphe sont q -fixables pour tout $q \in [1, n-1]$; pour illustrer ce fait, considérons le graphe C_4^3 suivant (figure 2.5) :

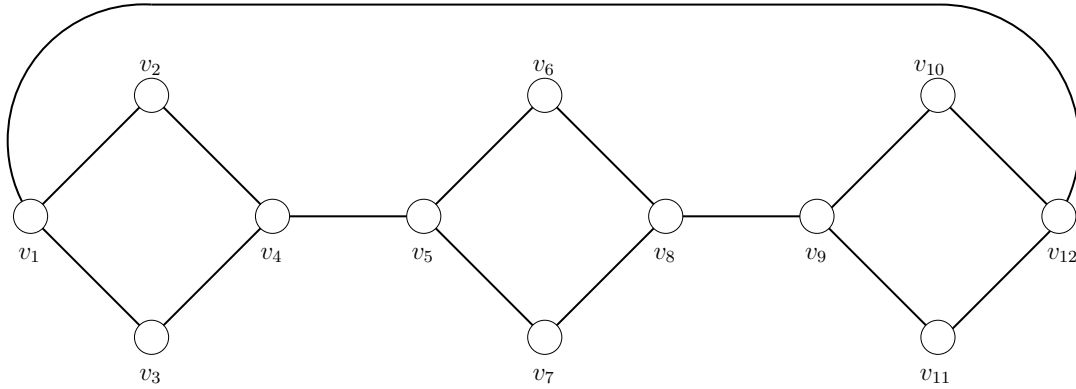


Figure 2.5 – Le graphe C_4^3

Celui-ci a la particularité d'être 2-connexe, non hamiltonien (on notera même qu'il n'est pas traçable) et AP+1. Si l'on souhaitait vérifier cette dernière propriété, nous serions donc contraints de nous assurer que ses douze sommets sont bien q -fixables pour tout $q \in [1, 11]$. Autrement dit, nous devrions trouver $12 \cdot 11$ sous-ensembles de ses sommets satisfaisant les contraintes de la Définition 1 (page 18) et vérifier qu'autant de ses sous-graphes sont arbitrairement partitionnables, ce qui est important pour un graphe composé d'aussi peu de sommets.

Avant de présenter davantage de graphes AP+1 non hamiltoniens, il est donc nécessaire de pouvoir vérifier plus facilement que les sommets d'un graphe G sont q -fixables dans celui-ci pour tout $q \in [1, n - 1]$. Dans ce but, nous allons présenter deux méthodes pour simplifier cette vérification permettant de réduire le nombre de sommets de G desquels nous devons vérifier la fixabilité ainsi que la valeur maximale de q jusqu'à laquelle nous devons nous assurer que ces derniers sont q -fixables dans G .

Méthode 1 : réduire le nombre de sommets dont la fixabilité doit être vérifiée

Le premier fait à remarquer est que lorsqu'un graphe G possède une certaine "symétrie", comme le graphe C_4^3 , il est possible de choisir, pour y q -fixer un sommet v dans un sous-ensemble S_q , un sous-ensemble de sommets équivalent à S'_q , celui que l'on choisirait pour y q -fixer un sommet similaire à v . Supposons en effet que $G[S'_q]$ soit connexe et que $G[V \setminus S'_q]$ soit AP ; si S_q et S'_q sont des sous-ensembles de sommets localement équivalents de G , $G[S_q]$ sera aussi connexe et $G[V \setminus S_q]$ sera également AP. S_q sera donc un sous-ensemble de sommets valable pour q -fixer le sommet v dans G . Ainsi, il est possible d'alléger le processus de vérification de la partition arbitraire avec une préaffectation des graphes possédant des similarités dans leur topologie en choisissant des sous-ensembles équivalents de sommets lors du fixage de sommets similaires.

Dans la théorie des graphes, cette notion de similarité correspond à celle d'*automorphisme de graphe* [6]. Formellement, un automorphisme $\phi : V \rightarrow V$ de G est un endomorphisme bijectif de l'ensemble de ses sommets qui préserve ses arêtes : uv est une arête de G ssi $\phi(u)\phi(v)$ en est une également. La manière dont il faut interpréter le fait que $\phi(u) = v$ est qu'il est possible de "remplacer" u par v dans G par un simple renommage de ses sommets.

Grâce aux automorphismes de graphe, nous pouvons définir formellement la notion de similarité dans un graphe perçue précédemment :

Définition 3 :

Soient G un graphe, et u et v deux de ses sommets. Notons \sim_A la relation binaire d'équivalence "être similaire par automorphisme" définie sur V de la manière suivante : $u \sim_A v$ s'il existe un automorphisme $\phi : V \rightarrow V$ tel que $\phi(v) = u$. La classe des similaires de u , notée $[u]_A$, est l'ensemble des sommets équivalents à u dans G à automorphisme près, à savoir $\{w \in V / u \sim_A w\}$.

Via cette définition, nous pouvons formellement poser le fait que deux sommets similaires d'un graphe vont pouvoir être q -fixables dans celui-ci dans des sous-ensembles de sommets "équivalents" pour un q quelconque :

Observation 6 :

Soient G un graphe, et u et v deux de ses sommets tels que $v \in [u]_A$. Si u est q -fixable dans G en un sous-ensemble S_q pour un $q \geq 1$ quelconque, alors v y est q -fixable dans le sous-ensemble $S'_q = \{\phi(w) / w \in S_q\}$, où ϕ est un automorphisme de G vérifiant $\phi(v) = u$.

Ainsi, pour prouver qu'un graphe G est AP+1, il n'est pas nécessaire de prouver la fixabilité de tous ses sommets : si un sommet v est q -fixable dans celui-ci pour un certain q , alors c'est également le cas, d'après l'Observation 6, de tous ses similaires dans G , à savoir tous les sommets de l'ensemble $[v]_A$.

En guise d'exemple, considérons de nouveau le graphe C_4^3 que nous avons présenté précédemment (figure 2.5 page précédente). Il est facilement observable que beaucoup de ses sommets sont similaires au sens que nous venons de définir (Définition 3) ; c'est par exemple le cas de ses deux sommets v_1 et v_4 comme en témoigne l'automorphisme ϕ suivant :

$$\phi \begin{cases} \phi(v_1) = v_4 & \phi(v_7) = v_{11} \\ \phi(v_2) = v_2 & \phi(v_8) = v_9 \\ \phi(v_3) = v_3 & \phi(v_9) = v_8 \\ \phi(v_4) = v_1 & \phi(v_{10}) = v_6 \\ \phi(v_5) = v_{12} & \phi(v_{11}) = v_7 \\ \phi(v_6) = v_{10} & \phi(v_{12}) = v_5 \end{cases}$$

En réalité, il est possible de regrouper les sommets de C_4^3 en deux classes de sommets similaires, à savoir $[v_1]_A = \{v_1, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{12}\}$ et $[v_2]_A = \{v_2, v_3, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}\}$. De ce fait, pour prouver que C_4^3 est AP+1, on peut en fait se contenter de montrer que seulement deux de ses sommets, v_1 et v_2 , sont q -fixables dans celui-ci pour tout q plutôt que de le faire exhaustivement pour ses douze sommets.

Pour l'anecdote, les graphes dans lesquels cette première méthode de simplification est la plus efficace sont ceux dans lesquels tous les sommets sont similaires les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire ceux vérifiant $[v]_A = V$ pour tout $v \in V$.

De tels graphes sont dits *sommet-transitifs*. D'après une conjecture de Lovász, tous les graphes sommet-transitifs seraient hamiltoniens (et donc AP+1 d'après la Conséquence 4 page 21) à l'exception de cinq graphes, à savoir K_2 , le graphe de Petersen, celui de Coxeter, et deux graphes obtenus à partir de ces deux derniers en remplaçant chacun de leurs sommets par un K_3 . Or, ceux-ci sont *hypohamiltoniens*¹, et il est assez facile de voir que les graphes ayant cette

1. Un graphe G est dit *hypohamiltonien* si $\forall v \in V$, le graphe $G[V \setminus \{v\}]$ est hamiltonien.

propriété sont également AP+1. Tous les graphes sommet-transitifs seraient donc trivialement AP+1 d'après cette conjecture, ce qui rendrait notre méthode de simplification de la partition arbitraire avec une préaffectation peu intéressante pour ceux-ci.

Une étude de la partition arbitraire des graphes sommet-transitifs ne serait pas dénuée d'intérêt pour autant : la notion de partition arbitraire étant un affaiblissement de l'hamiltonicité, les résultats que l'on trouverait pourraient permettre de prouver une version faible de la conjecture de Lovász, ce qui constituerait un nouvel angle d'attaque pour avancer sur celle-ci.

Méthode 2 : abaisser la valeur maximale de q jusqu'à laquelle la q -fixabilité d'un sommet doit être vérifiée

D'après la définition de la partition arbitraire avec une préaffectation que nous avons donnée (Définition 2 page 19), il est nécessaire de vérifier, pour prouver qu'un graphe est AP+1, que tous ses sommets y sont q -fixables pour tout $q \in [1, n - 1]$. Il apparaît alors normal, pour simplifier cette vérification, d'essayer de limiter la valeur maximale de q jusqu'à laquelle nous devons vérifier cela.

Pour cela, on peut par exemple avoir recours à la constatation suivante : si l'on arrive à q -fixer un sommet u dans G dans un sous-ensemble S_q tel que $G[V \setminus S_q]$ possède une chaîne couvrante v_1, \dots, v_{n-q} dont l'une des extrémités, disons v_1 sans perte de généralité, possède un voisin dans S_q , alors u est immédiatement q' -fixable dans G pour tout $q' \in [q + 1, n - 1]$. En effet, il est facile de voir que, pour un tel q' , le sous-ensemble $S_{q'} = S_q \cup \{v_1, \dots, v_{q'-q}\}$ permet de q' -fixer le sommet u dans G : comme $G[S_q]$ est connexe, $G[S_{q'}]$ l'est également, et $G[V \setminus S_{q'}]$ reste traçable et donc AP.

Nous définissons formellement cette remarque de la manière suivante :

Définition 4 :

Soient G un graphe, et v l'un de ses sommets. La distance à traçabilité de v , notée $d_T(v)$, est le plus petit entier $d \leq n - 1$ pour lequel il existe un sous-ensemble $S_d \subset V$ tel que $v \in S_d$, $G[S_d]$ soit connexe d'ordre d , et $G[V \setminus S_d]$ soit couvert par une $(n - d)$ -chaîne dont l'une des extrémités est adjacente à un sommet de S_d .

Observation 7 :

Soient G un graphe, et v l'un de ses sommets. Si $d_T(v) = d$, alors v est q -fixable dans G pour tout $q \in [d, n - 1]$.

À titre d'exemple, on peut considérer le cas du sommet v_1 du graphe C_4^3 que nous avons présenté précédemment (figure 2.5 page 22). Il est facilement vérifiable que $d_T(v_1) = 6$, distance atteinte pour le sous-ensemble $S_6 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$; de ce fait, pour prouver que C_4^3 est AP+1, on peut se contenter de vérifier que v_1 est q -fixable dans celui-ci pour tout $q \in [1, 5]$ plutôt que de devoir le faire pour tout $q \in [1, 11]$.

Il serait bien entendu possible de définir une distance identique pour un motif de graphes AP différents des chaînes. Cependant, ce dernier paraît le plus pertinent pour deux raisons principales. Tout d'abord car les chaînes sont les motifs les plus simples à repérer dans un graphe, mais également car les graphes que nous traitons ici sont 2-connexes. En effet, du fait qu'un graphe biconnexe contient des cycles dans sa structure, nous avons l'intuition que la distance à traçabilité d'un de ses sommets quelconque sera "souvent" relativement faible par rapport à n^2 . De ce fait, la notion de distance à traçabilité allège la vérification de la partition arbitraire avec une préaffectation d'un graphe dans la plupart des cas.

2. Cela n'est pas systématique : considérer un ballon de profil $B(1, \dots, 1)$ avec de nombreuses branches.

2.2.3 Une classe infinie de graphes AP+1 non hamiltoniens

En combinant les notions de sommets similaires (Observation 6) et de distance à traçabilité (Observation 7) que nous venons de définir, il est possible de faciliter nettement la vérification qu'un graphe est AP+1. Pour en être définitivement convaincu, nous allons illustrer l'utilisation de celles-ci sur une famille infinie de tels graphes non hamiltoniens.

La classe de graphes en question, celle des *cylindres*, se définit de la façon suivante :

Définition 5 :

Soit $p_1 \geq 1$ et $p_2 \geq 1$ deux entiers. Le cylindre d'ordre $8 + p_1 + p_2$, noté $C(p_1, p_2)$, est le graphe obtenu en connectant deux 4-cycles, dont les sommets sont dénotés respectivement par $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $\{s_5, s_6, s_7, s_8\}$, grâce à une p_1 -chaîne et une p_2 -chaîne reliant respectivement s_2 à s_6 , et s_4 à s_8 .

La structure d'un tel graphe est représentée sur la figure suivante (figure 2.6) :

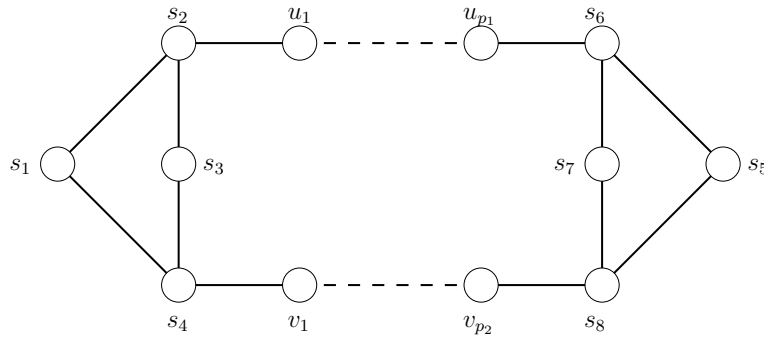


Figure 2.6 – Le cylindre $C(p_1, p_2)$

Nous proposons de montrer que tous les cylindres de la famille $\mathcal{C} = \{C(p, p) / p \geq 2 \text{ pair}\}$ sont AP+1. Pour cela, nous allons avoir besoin d'introduire deux lemmes.

Le premier concerne la partition arbitraire des 3-ballons sectionnés de forme $CB(p_1, p_2, 1, 1)$, que nous allons être amenés à manipuler afin de montrer la q -fixabilité de certains sommets d'un graphe de \mathcal{C} , typiquement lorsque nous essaierons de 2-fixer le sommet s_1 de celui-ci (voir figure 2.6). Ainsi, nous devons être en mesure de savoir pour quelles valeurs de p_1 et p_2 un tel 3-ballon sectionné est AP.

Lemme 1 :

Soient $p_1 \geq 1$ et $p_2 \geq 1$ deux entiers. Le 3-ballon sectionné $CB(p_1, p_2, 1, 1)$ est AP ssi p_1 ou p_2 est pair.

Preuve :

Nous allons prouver l'implication dans les deux sens en utilisant les notations de la figure 2.7 pour faire référence aux sommets de B , un 3-ballon sectionné de forme $CB(p_1, p_2, 1, 1)$:

\Rightarrow) Montrons que si p_1 et p_2 sont tous les deux impairs, alors B ne peut pas être AP. Remarquons que B est d'ordre $n = 4 + p_1 + p_2$, qui est pair lorsque p_1 et p_2 sont tous les deux impairs. Il est alors facile de voir qu'il n'admet pas de couplage parfait sous ces conditions, ce qui implique que la 2-séquence $(2, \dots, 2)$, qui est admissible pour n , n'est pas réalisable dans celui-ci. Il n'est donc pas AP.

\Leftarrow) Nous allons maintenant prouver que si p_1 ou p_2 est pair, alors B est obligatoirement AP. Sans perte de généralité, supposons que p_2 soit pair. Remarquons que B est couvert par la chenille $C = Cat(p_1 + 1, p_2 + 3)$ de racine r_1 ; ainsi, d'après la Conséquence 1 (page 14), il suffit

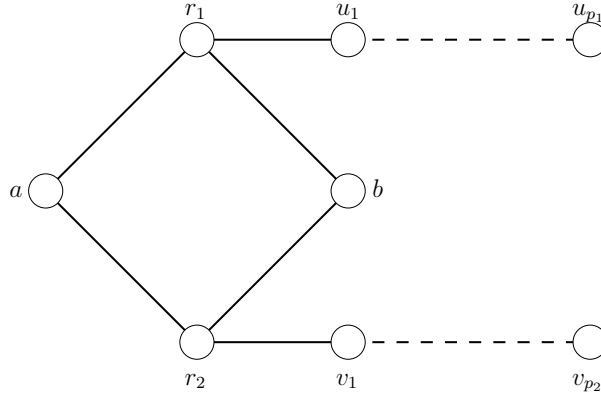


Figure 2.7 – Le 3-ballon sectionné $CB(p_1, p_2, 1, 1)$

de montrer que C est AP pour prouver que B l'est. Le diamètre d'une chenille étant de $n - 1$, d'après le théorème de Ravoux (Théorème 3 page 15), cela peut se faire en montrant simplement que toute k -séquence de n est réalisable dans C .

Soit $\tau_k = (k, \dots, k)$ une k -séquence de n . Considérons alors la stratégie pour réaliser τ_k dans C consistant à placer l'intégralité des sommets de son bras de taille p_1 ainsi que sa racine r_1 dans l sous-ensembles S_1, \dots, S_l en partant du sommet u_{p_1} de sorte que $\forall i \in [1, l - 1], |S_i| = k$. Ces l sous-ensembles contiennent alors l'intégralité des sommets du bras de longueur p_1 de C par paquets de k successifs, sauf éventuellement le dernier sous-ensemble S_l , celui contenant r_1 , qui peut en contenir moins. Deux cas peuvent alors survenir :

- $|S_l| = k$; le reste du graphe, c'est-à-dire $C[V \setminus \bigcup_{i=1}^l S_i]$, est alors isomorphe à la chenille $Cat(2, p_2 + 1)$ qui est AP car p_2 est pair (Théorème 5 page 16). Il est donc possible de trouver une réalisation R dans celui-ci de $\tau_k \setminus \{k\}^l$, le reste de la séquence τ_k . Au final, $R \cup \bigcup_{i=1}^l S_i$ est une réalisation de τ_k dans C .
- $|S_l| \leq k - 1$; il est alors possible d'ajouter des éléments à S_l pour obtenir un sous-ensemble S'_l de taille k tout en faisant en sorte que le sous-graphe $C[V \setminus (S'_l \cup \bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)]$ soit isomorphe à une chaîne. Pour cela, il suffit de choisir $S'_l = S_l \cup \{a\} \cup P$, où P est l'ensemble des $k - (|S_l| + 1)$ premiers éléments de la chaîne b, v_1, \dots, v_{p_2} en commençant par b ; $C[V \setminus (S'_l \cup \bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)]$ étant traçable, il est facile de choisir, dans ce sous-graphe, les sous-ensembles $S_{l+1}, \dots, S_{\frac{n}{k}}$ de taille k manquants. $(S_1, \dots, S_{l-1}, S'_l, S_{l+1}, \dots, S_{\frac{n}{k}})$ forme alors une réalisation de τ_k dans C .

Finalement, toute k -séquence est réalisable dans C , qui est donc AP lorsque p_2 est pair. B est donc, sous cette condition, couvert par une chenille AP, ce qui implique sa partition arbitraire. \square

Le second lemme dont nous allons avoir besoin pour prouver qu'un cylindre $C = C(p_1, p_2)$ est AP+1 concerne la partition arbitraire des graphes que nous obtiendrons au moment de q -fixer un sommet central u_i de sa p_1 -chaîne pour de petites valeurs de q , typiquement celles trop petites pour pouvoir englober u_i ainsi que tous les sommets de C situés entre ce dernier et l'un des deux sommets primaires que lie sa p_1 -chaîne. Ainsi, pour réussir à q -fixer un tel sommet de C pour un tel q , nous allons obligatoirement avoir affaire à la partition arbitraire d'un *cylindre sectionné* (figure 2.8).

Définition 6 :

Soit $p_1 \geq 1$, $p_2 \geq 1$, et $p_3 \geq 1$ trois entiers. Le cylindre sectionné d'ordre $8 + p_1 + p_2 + p_3$, noté $CC(p_1, p_2, p_3)$, est le graphe obtenu en supprimant l'arête $u_{p_1} u_{p_1+1}$ du cylindre $C(p_1 + p_2, p_3)$.

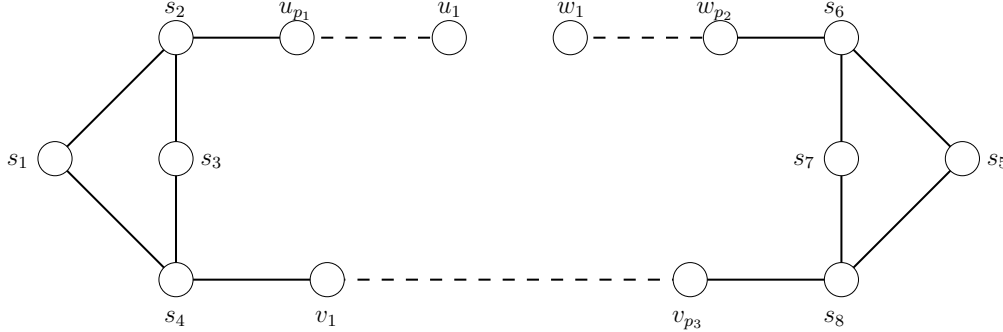


Figure 2.8 – Le cylindre sectionné $CC(p_1, p_2, p_3)$

Nous caractérisons ci-dessous les cylindres sectionnés arbitrairement partitionnables que nous obtiendrons en fixant certains des sommets des cylindres de \mathcal{C} , c'est-à-dire ceux vérifiant $p_3 \geq 2$ pair :

Lemme 2 :

Soit $p_3 \geq 2$ un entier pair, et $p_1 \geq 1$ et $p_2 \geq 1$ deux entiers. Le cylindre sectionné $CC(p_1, p_2, p_3)$ est AP ssi p_1 ou p_2 est pair.

Preuve :

Soit $p_3 \geq 2$ un entier pair fixé ; nous allons prouver l'implication dans les deux sens en utilisant les notations de la figure 2.8 :

\Rightarrow) Si p_1 et p_2 sont tous les deux impairs, on remarquera que l'ordre de $C = CC(p_1, p_2, p_3)$ est pair. Il est alors facile de voir que C n'admet pas de couplage parfait ; la 2-séquence $(2, \dots, 2)$ n'est donc pas réalisable dans celui-ci, ce qui implique qu'il n'est pas AP.

\Leftarrow) Sans perte de généralité, supposons que p_2 soit pair. Nous allons désormais montrer que quelque soient les valeurs prises par p_1 et p_2 , $C = CC(p_1, p_2, p_3)$ est toujours AP. Pour cela, nous allons utiliser un raisonnement par récurrence sur p_1 et en appliquer un second sur p_2 pour chacune des valeurs successivement prises par p_1 .

Commençons donc par fixer $p_1 = 1$ et prouvons que le graphe C est AP quelque soit la valeur prise par p_2 . Posons alors $p_2 = 2$; pour prouver que C est AP, nous allons montrer que quelque soit $q \in [1, n - 1]$, il possède un sommet q -fixable dans celui-ci, ce qui constitue une condition suffisante pour la partition arbitraire d'un graphe. La table 2.1 récapitule les sous-ensembles S_q que l'on peut choisir pour chaque valeur de q . Pour rappel, un 3-ballon sectionné de profil $CB(b_1, b_2, 1, 1)$ est AP lorsque b_1 ou b_2 est pair (Lemme 1 page 25).

Supposons donc qu'un graphe C de profil $CC(1, p_2, p_3)$ soit AP pour toute valeur prise par p_2 jusqu'à $2l$, $l \geq 2$, et montrons que c'est également le cas pour $p_2 = 2 \cdot (l + 1)$. Pour cela, nous allons utiliser la même méthode que ce que nous avons fait précédemment pour $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$; les sous-ensembles de sommets de C à choisir pour tout $q \in [1, n - 1]$ sont récapitulés dans la table 2.2.

Table 2.1 – Choix des S_q pour prouver que $C = CC(1, 2, p_3)$ est AP

| q | S_q | $C[V \setminus S_q]$ |
|----------------------|-------------------------------|--|
| 1 | $\{u_1\}$ | Couvert par $CB(2, p_3 + 4, 1, 1)$ |
| 2 | $\{w_1, w_2\}$ | Couvert par $CB(1, p_3 + 4, 1, 1)$ |
| 3 | $\{u_1, s_2, s_1\}$ | Isomorphe à $CB(2, p_3 + 2, 1, 1)$ |
| 4 | $\{u_1, s_2, s_1, s_3\}$ | Isomorphe à $CB(2, p_3 + 1, 1, 1)$ |
| 5 | $\{u_1, s_2, s_1, s_3, s_4\}$ | Isomorphe à $CB(2, p_3, 1, 1)$ |
| $q \in [6, p_3 + 4]$ | $S_{q-1} \cup \{v_{q-5}\}$ | Isomorphe à $CB(2, p_3 - (q - 5), 1, 1)$ |
| $p_3 + 5$ | $S_{p_3+4} \cup \{v_{p_3}\}$ | Traçable |
| $p_3 + 6$ | $S_{p_3+5} \cup \{s_8\}$ | Isomorphe à $Cat(2, 3)$ |
| $p_3 + 7$ | $S_{p_3+6} \cup \{s_7\}$ | Traçable |
| $p_3 + 8$ | $S_{p_3+7} \cup \{s_5\}$ | Traçable |
| $p_3 + 9$ | $S_{p_3+8} \cup \{s_6\}$ | Traçable |
| $p_3 + 10$ | $S_{p_3+9} \cup \{w_2\}$ | Isomorphe à K_1 |

Table 2.2 – Choix des S_q pour prouver que $C = CC(1, p_2, p_3)$ est AP

| q | S_q | $C[V \setminus S_q]$ |
|----------------------|---|--|
| 1 | $\{u_1\}$ | Couvert par $CB(p_2, p_3 + 4, 1, 1)$ |
| 2 | $\{w_1, w_2\}$ | Isomorphe à $CC(1, p_2 - 2, p_3)$ |
| 3 | $\{u_1, s_2, s_1\}$ | Isomorphe à $CB(p_2, p_3 + 2, 1, 1)$ |
| 4 | $\{u_1, s_2, s_1, s_3\}$ | Isomorphe à $CB(p_2, p_3 + 1, 1, 1)$ |
| 5 | $\{u_1, s_2, s_1, s_3, s_4\}$ | Isomorphe à $CB(p_2, p_3, 1, 1)$ |
| $q \in [6, p_3 + 4]$ | $S_{q-1} \cup \{v_{q-5}\}$ | Isomorphe à $CB(p_2, p_3 - (q - 5), 1, 1)$ |
| $p_3 + 5$ | $S_{p_3+4} \cup \{v_{p_3}\}$ | Traçable |
| $p_3 + 6$ | $S_{p_3+5} \cup \{s_8\}$ | Isomorphe à $Cat(2, p_2 + 1)$ |
| $p_3 + 7$ | $S_{p_3+6} \cup \{s_7\}$ | Traçable |
| $p_3 + 8$ | $S_{p_3+7} \cup \{s_5\}$ | Traçable |
| $p_3 + 9$ | $S_{p_3+8} \cup \{s_6\}$ | Traçable |
| $q \geq (p_3 + 10)$ | $S_{q-1} \cup \{w_{p_2-(q-(p_3+10))}\}$ | Traçable |

La propriété est donc vraie pour $p_1 = 1$. Supposons qu'elle le soit pour tout $p_1 \leq l'$, $l' \geq 1$, et considérons-la au rang $l' + 1$. Encore une fois, procédons par récurrence sur la valeur de $p_2 \geq 2$. Posons alors $p_2 = 2$, et prouvons une nouvelle fois que le graphe $C = CC(p_1, 2, p_3)$ est AP en montrant que quelque soit $q \in [1, n - 1]$, il possède un sommet q -fixable dans celui-ci. Les sous-ensembles S_q ainsi choisissables sont donnés dans la table 2.3.

Il ne reste plus qu'à supposer que ce soit vrai pour $p_2 \leq 2l''$, avec $l'' \geq 2$, et à prouver que c'est également le cas lorsque $p_2 = 2 \cdot (l'' + 1)$. Pour cela, il est possible d'utiliser une dernière fois la procédure de vérification que nous avons utilisée pour les cas précédents ; on peut notamment s'inspirer des sous-ensembles de sommets que nous avons choisi pour le cas $p_1 = l' + 1$ et $p_2 = 2$ (voir table 2.4).

Finalement, nous avons prouvé que le graphe $CC(p_1, p_2, p_3)$ est bien AP pour un $p_3 \geq 2$ pair fixé et quelque soient les valeurs prises par $p_1 \geq 1$ et $p_2 \geq 2$ pair. \square

Table 2.3 – Choix des S_q pour prouver que $C = CC(p_1, 2, p_3)$ est AP

| q | S_q | $C[V \setminus S_q]$ |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| $q \in [1, p_1 - 1]$ | $\{u_1, \dots, u_q\}$ | Isom. à $CC(p_1 - q, 2, p_3)$ |
| p_1 | $\{u_1, \dots, u_{p_1}\}$ | Couv. par $CB(2, p_3 + 4, 1, 1)$ |
| $p_1 + 1$ | $S_{p_1} \cup \{s_2\}$ | R-AP ³ |
| $p_1 + 2$ | $S_{p_1+1} \cup \{s_1\}$ | Isom. à $CB(2, p_3 + 2, 1, 1)$ |
| $p_1 + 3$ | $S_{p_1+2} \cup \{s_3\}$ | Isom. à $CB(2, p_3 + 1, 1, 1)$ |
| $p_1 + 4$ | $S_{p_1+3} \cup \{s_4\}$ | Isom. à $CB(2, p_3, 1, 1)$ |
| $q \in [p_1 + 5, p_1 + p_3 + 3]$ | $S_{q-1} \cup \{v_{q-(p_1+4)}\}$ | Isom. à $CB(2, p_3 - (q - (p_1 + 4)), 1, 1)$ |
| $p_1 + p_3 + 4$ | $S_{p_1+p_3+3} \cup \{v_{p_3}\}$ | Traçable |
| $p_1 + p_3 + 5$ | $S_{p_1+p_3+4} \cup \{s_8\}$ | Isom. à $Cat(2, 3)$ |
| $p_1 + p_3 + 6$ | $S_{p_1+p_3+5} \cup \{s_7\}$ | Traçable |
| $p_1 + p_3 + 7$ | $S_{p_1+p_3+6} \cup \{s_5\}$ | Traçable |
| $p_1 + p_3 + 8$ | $S_{p_1+p_3+7} \cup \{s_6\}$ | Traçable |
| $p_1 + p_3 + 9$ | $S_{p_1+p_3+8} \cup \{w_2\}$ | Isom. à K_1 |

Table 2.4 – Choix des S_q pour prouver que $C = CC(p_1, p_2, p_3)$ est AP

| q | S_q | $C[V \setminus S_q]$ |
|----------------------------------|--|--|
| $q \in [1, p_1 - 1]$ | $\{u_1, \dots, u_q\}$ | Isom. à $CC(p_1 - q, p_2, p_3)$ |
| p_1 | $\{u_1, \dots, u_{p_1}\}$ | Couv. par $CB(p_2, p_3 + 4, 1, 1)$ |
| $p_1 + 1$ | $S_{p_1} \cup \{s_2\}$ | R-AP ³ |
| $p_1 + 2$ | $S_{p_1+1} \cup \{s_1\}$ | Isom. à $CB(p_2, p_3 + 2, 1, 1)$ |
| $p_1 + 3$ | $S_{p_1+2} \cup \{s_3\}$ | Isom. à $CB(p_2, p_3 + 1, 1, 1)$ |
| $p_1 + 4$ | $S_{p_1+3} \cup \{s_4\}$ | Isom. à $CB(p_2, p_3, 1, 1)$ |
| $q \in [p_1 + 5, p_1 + p_3 + 3]$ | $S_{q-1} \cup \{v_{q-(p_1+4)}\}$ | Isom. à $CB(p_2, p_3 - (q - (p_1 + 4)), 1, 1)$ |
| $p_1 + p_3 + 4$ | $S_{p_1+p_3+3} \cup \{v_{p_3}\}$ | Traçable |
| $p_1 + p_3 + 5$ | $S_{p_1+p_3+4} \cup \{s_8\}$ | Isom. à $Cat(2, p_2 + 1)$ |
| $p_1 + p_3 + 6$ | $S_{p_1+p_3+5} \cup \{s_7\}$ | Traçable |
| $p_1 + p_3 + 7$ | $S_{p_1+p_3+6} \cup \{s_5\}$ | Traçable |
| $p_1 + p_3 + 8$ | $S_{p_1+p_3+7} \cup \{s_6\}$ | Traçable |
| $q \geq (p_1 + p_3 + 9)$ | $S_{q-1} \cup \{w_{p_2-(q-(p_1+p_3+9))}\}$ | Traçable |

Nous allons désormais pouvoir prouver, grâce aux deux lemmes précédents, que les cylindres de la famille \mathcal{C} , où, rappelons-le, $\mathcal{C} = \{C(p, p) / p \geq 2 \text{ pair}\}$, sont AP+1. Les notations que nous allons utiliser sont celles de la figure 2.6 (page 25).

Proposition 2 :

Soit $p \geq 2$ un entier pair. Le cylindre $C(p, p)$ est AP+1.

Preuve :

Soit $C = C(p, p)$ un graphe de \mathcal{C} pour un $p \geq 2$. Pour prouver que C est AP+1, nous devons montrer que chacun de ses sommets v y est q -fixable pour tout $q \in [1, d_T(v) - 1]$ (Observation 7 page 24). Conformément à l'Observation 6 (page 23), nous pouvons nous limiter à montrer cela pour un échantillon de sommets suffisamment représentatif de l'ensemble des éléments de V , à savoir ceux définissant les classes de sommets similaires de C .

3. Facilement vérifiable grâce à la Remarque 2 (page 16).

Il est possible d'identifier $2 + \frac{p}{2}$ classes de sommets similaires de C , à savoir :

- $[s_1]_A = \{s_1, s_3, s_5, s_7\}$,
- $[s_2]_A = \{s_2, s_4, s_6, s_8\}$,
- $[u_i]_A = \{u_i, v_i, u_{p-i+1}, v_{p-i+1}\}, \forall i \in [1, \frac{p}{2}]$.

La distance à traçabilité des sommets de C définissant ses classes de similaires ainsi que les sous-ensembles de sommets permettant de les obtenir sont récapitulés dans la table 2.5 suivante :

Table 2.5 – Distances à traçabilité des sommets représentants du graphe $C(p, p)$

| $v \in V$ | $d_T(v)$ | S_d |
|---------------------------------------|----------|---------------------------------|
| s_1 | $p + 2$ | $\{s_1, s_2, u_1, \dots, u_p\}$ |
| s_2 | $p + 2$ | $\{s_1, s_2, u_1, \dots, u_p\}$ |
| $u_i, \forall i \in [1, \frac{p}{2}]$ | p | $\{u_1, \dots, u_p\}$ |

Il ne nous reste plus qu'à montrer que chaque sommet v de C définissant l'une de ses classes de sommets similaires est bien q -fixable dans ce graphe pour tout $q \in [1, d_T(v) - 1]$. Les sous-ensembles de sommets S_q à choisir à chaque fois sont récapitulés dans la table 2.6. Rappelons notamment qu'un 3-ballon sectionné de profil $CB(p_1, p_2, 1, 1)$ ou un cylindre sectionné de forme $CC(p_1, p_2, p)$ est AP dès que p_1 ou p_2 est pair (Lemmes 1 page 25 et 2 page 27).

Table 2.6 – Choix des S_q pour la fixabilité de chaque sommet de $C = C(p, p)$

| $v \in V$ | q | S_q | $C[V \setminus S_q]$ |
|--|-----------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| s_1 | 1 | $\{s_1\}$ | Traçable |
| | 2 | $\{s_1, s_2\}$ | Is. à $CB(p, p + 2, 1, 1)$ |
| | $q \in [3, p + 2]$ | $\{s_1, s_2, u_1, \dots, u_{q-2}\}$ | Is. à $CB(p - q + 2, p + 2, 1, 1)$ |
| s_2 | 1 | $\{s_2\}$ | R-AP ⁴ |
| | 2 | $\{s_1, s_2\}$ | Is. à $CB(p, p + 2, 1, 1)$ |
| | $q \in [3, p + 2]$ | $\{s_1, s_2, u_1, \dots, u_{q-2}\}$ | Is. à $CB(p - q + 2, p + 2, 1, 1)$ |
| u_i impair, $i \in [1, \frac{p}{2}]$ | $q \leq i - 1$ | $\{u_i, \dots, u_{i+q-1}\}$ | Is. à $CC(i - 1, p - (i + q - 1), p)$ |
| | $q \geq i$ | $\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_q\}$ | Couvert par $CB(p - q, p + 4, 1, 1)$ |
| u_i pair, $i \in [1, \frac{p}{2}]$ | $q = 1$ | $\{u_i\}$ | Is. à $CC(i - 1, p - i, p)$ |
| | $2 \leq q \leq i - 1$ | $\{u_{i-1}, \dots, u_{i+q-2}\}$ | Is. à $CC(i - 2, p - (i + q - 2), p)$ |
| | $q \geq i$ | $\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_q\}$ | Couvert par $CB(p - q, p + 4, 1, 1)$ |

□

Des graphes AP+1 non triviaux ayant été exhibés, nous allons maintenant étudier la place de la partition arbitraire avec une préaffectation au sein de la hiérarchie des versions de la partition arbitraire déjà établie par le Théorème 4 (page 15).

4. Facilement vérifiable grâce à la Remarque 2 (page 16).

2.3 Relation avec les différentes versions de la partition arbitraire

Une hiérarchie des versions de la partition arbitraire ayant été définie (Théorème 4 page 15), on peut naturellement se demander où se situe la partition arbitraire avec une préaffectation dans celle-ci.

Nous avons vu, au moment de définir les graphes AP+1, que ceux-ci sont nécessairement AP (Proposition 1 page 19) mais que l'inverse n'est pas toujours vrai (considérer le graphe de la figure 2.2 page 19). De là, nous avons donc immédiatement que $AP(n) \supsetneq AP+1(n)$, où, rappelons-le, $AP+1(n)$ désigne les graphes AP+1 d'ordre n .

Nous avons également pu constater que les graphes traçables ne sont pas toujours AP+1 car les chaînes ne le sont pas. En revanche les graphes hamiltoniens sont toujours AP+1 (Conséquence 4 page 21); ces derniers étant traçables, il existe donc des graphes traçables qui sont AP+1. Enfin, nous avons également vu qu'il existe des graphes AP+1 non traçables, comme le graphe C_4^3 (figure 2.5 page 22) ou les cylindres de forme $C(p, p)$, $p \geq 2$ pair (Proposition 2 page 29). Ainsi, le fait suivant est vrai :

Proposition 3 :

$Traceable(n) \cap AP+1(n) \neq \emptyset$, $Traceable(n) \not\subset AP+1(n)$, et $AP+1(n) \not\subset Traceable(n)$

Il reste donc à étudier la relation entre les graphes AP+1 et les graphes OL-AP/R-AP. Du fait que les graphes traçables soient tous OL-AP et R-AP (Théorème 4 page 15) et qu'il existe des graphes traçables AP+1, nous pouvons immédiatement dire qu'il existe des graphes OL-AP et/ou R-AP qui sont AP+1. De plus, il est assez simple, du fait de la 2-connectivité des graphes AP+1 (Proposition 1 page 19), de voir qu'il existe des graphes OL-AP et/ou R-AP qui ne sont pas AP+1 : il suffit de considérer un graphe OL-AP et R-AP de connectivité 1, comme la chenille $Cat(2, 3)$, pour s'en convaincre.

Proposition 4 :

$OL-AP(n) \cap AP+1(n) \neq \emptyset$, et $OL-AP(n) \not\subset AP+1(n)$

$R-AP(n) \cap AP+1(n) \neq \emptyset$, et $R-AP(n) \not\subset AP+1(n)$

De là, trois scénarios sont envisageables :

- soit tous les graphes AP+1 sont R-AP et donc OL-AP ;
- soit ils sont tous R-AP ou OL-AP et certains ne sont pas R-AP ;
- soit il en existe n'étant pas OL-AP, et donc pas R-AP non plus.

Il est difficile de pouvoir dès à présent déterminer la nature exacte de la relation entre les graphes AP+1, OL-AP et R-AP puisque la majeure partie des graphes AP+1 que nous connaissons sont hamiltoniens et donc R-AP. Ajoutons à cela que les graphes AP+1 non traçables que nous avons mis en évidence, C_4^3 (figure 2.5 page 22) et tous les cylindres de la famille \mathcal{C} (Proposition 2 page 29), sont également R-AP.

Proposition 5 :

Le graphe C_4^3 est R-AP.

Preuve :

Pour prouver que le graphe C_4^3 est R-AP, il suffit de montrer que pour tout $q \in [1, 6]$ il est possible de trouver un sous-ensemble $S_q \subset V$ de taille q satisfaisant les contraintes données par la Remarque 2 (page 16). Les sous-ensembles de sommets que l'on peut choisir pour chaque q

sont récapitulés dans la table 2.7, dans laquelle les notations utilisées sont directement reprises de la figure 2.5 page 22 :

Table 2.7 – Sous-ensembles S_q à choisir pour montrer que C_4^3 est R-AP

| q | S_q | $C_4^3[S_q]$ | $C_4^3[V \setminus S_q]$ |
|-----|------------------------------------|-------------------|--------------------------|
| 1 | $\{v_6\}$ | Isomorphe à K_1 | Traçable |
| 2 | $\{v_1, v_2\}$ | Isomorphe à K_2 | Couvert par $Cat(3, 7)$ |
| 3 | $\{v_1, v_2, v_3\}$ | Isomorphe à P_3 | Couvert par $Cat(2, 7)$ |
| 4 | $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ | Traçable | Traçable |
| 5 | $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ | Traçable | Couvert par $Cat(2, 5)$ |
| 6 | $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ | Traçable | Traçable |

□

Proposition 6 :

Soit $p \geq 2$ un entier. Le cylindre $C(p, p) \in \mathcal{C}$ est R-AP.

Preuve :

La preuve de cette proposition repose sur le fait qu'un 3-ballon sectionné de forme $CB(p_1, p_2, 1, 1)$, où au moins l'une des deux valeurs $p_1 \geq 1$ et $p_2 \geq 1$ est paire, est toujours R-AP. Cela peut être facilement vérifié en combinant plusieurs récurrences sur les valeurs p_1 et p_2 comme nous l'avons fait pour prouver le Lemme 2 (page 27); il suffit alors de montrer, à chaque pas de récurrence, que l'on peut trouver plusieurs sous-ensembles de sommets du 3-ballon sectionné $CB(p_1, p_2, 1, 1)$ actuel satisfaisant les contraintes exposées par la Remarque 2 (page 16). Une possibilité pour choisir l'un d'entre eux consiste à faire en sorte qu'il induise un graphe traçable, une chenille de profil $Cat(2, l)$ où $l \geq 3$ est impair, ou un 3-ballon sectionné R-AP traité plus tôt dans le schéma de récurrence.

Grâce à cet argument, nous pouvons désormais prouver qu'un cylindre $C(p, p)$ de \mathcal{C} , où $p \geq 2$ est pair, est R-AP. Pour cela, il suffit de montrer une nouvelle fois que pour tout $q \in [1, p+4]$ il est possible de trouver un sous-ensemble $S_q \subset V$ de taille q vérifiant les contraintes posées par la Remarque 2 (page 16). La table 2.8 liste les sous-ensembles que nous pouvons ainsi choisir pour chaque valeur pouvant être prise par q ; les notations utilisées sont celles de la figure 2.6 (page 25).

Table 2.8 – Sous-ensembles S_q à choisir pour montrer que $C = C(p, p)$ est R-AP

| q | S_q | $C[S_q]$ | $C[V \setminus S_q]$ |
|------------------|---|-------------------|------------------------------|
| 1 | $\{s_1\}$ | Isomorphe à K_1 | Traçable |
| 2 | $\{s_1, s_2\}$ | Isomorphe à K_2 | Is. à $CB(p, p+2, 1, 1)$ |
| 3 | $\{s_1, s_2, s_3\}$ | Isomorphe à P_3 | Is. à $CB(p, p+1, 1, 1)$ |
| 4 | $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ | Traçable | Is. à $CB(p, p, 1, 1)$ |
| $q \in [5, p+3]$ | $\{s_1, s_2, s_3, s_4, v_1, \dots, v_{q-4}\}$ | Traçable | Is. à $CB(p, p-(q-4), 1, 1)$ |
| $p+4$ | $\{s_1, s_2, s_3, s_4, v_1, \dots, v_p\}$ | Traçable | Traçable |

□

À l'heure actuelle, ce que nous savons sur les graphes AP+1 ne nous permet donc pas de pouvoir répondre à la question suivante :

Question 1 :

Soit G un graphe. Si G est AP+1, G est-il nécessairement R-AP/OL-AP?

Pour pouvoir apporter des éléments de réponse à celle-ci, une nécessité primordiale est de mettre en évidence davantage de graphes AP+1 non traçables pour augmenter notre connaissance de ceux-ci. Cependant, cela est difficile car ceux-ci sont nécessairement 2-connexes (Proposition 1 page 19), une propriété ayant été peu étudiée dans le cadre de la partition arbitraire si l'on omet la classe des ballons considérée par quelques auteurs [4, 9].

Dans la prochaine section, nous proposons donc de dédier une étude de la partition arbitraire avec une préaffectation à la classe des ballons, justifiée par le fait qu'il s'agisse de la seule classe de graphes 2-connexes à avoir été considérée jusqu'à maintenant dans le cadre de la partition arbitraire.

2.4 Étude de la classe des ballons

Le but de cette partie est de mettre en avant les propriétés devant être possédées par les ballons pour que ceux-ci soient arbitrairement partitionnables avec une préaffectation, l'intérêt étant, en ligne de mire, d'éventuellement trouver un tel ballon qui ne soit pas OL-AP et/ou R-AP pour pouvoir répondre à la Question 1 (page 32).

2.4.1 Premières caractéristiques des ballons AP+1

À travers les travaux menés par Gilbert sur les ballons AP [9], il ressort que les sommets les plus importants de ces graphes sont leurs racines. Du point de vue de la préaffectation de sommet, celles-ci jouent également un rôle central et engendrent la condition nécessaire suivante permettant d'avoir une première idée de la forme des ballons AP+1 :

Propriété 1 :

Si le k -ballon $B(b_1, \dots, b_k)$ est AP+1, alors le k -pode $P(b_1, \dots, b_k)$ est AP.

Cette propriété des k -ballons potentiellement AP+1 est une conséquence directe de la 1-fixabilité de leurs racines (Définition 1 page 18). Bien que triviale, elle permet néanmoins de limiter le nombre maximum de branches que ceux-ci peuvent posséder :

Conséquence 5 :

Si le k -ballon $B(b_1, \dots, b_k)$ est AP+1, alors $k \leq 4$.

Preuve :

Supposons que $B = B(b_1, \dots, b_k)$ soit un k -ballon AP+1 avec $k \geq 5$. D'après la Propriété 1, le k -pode $P(b_1, \dots, b_k)$ est donc AP. Or, d'après le Théorème 2 (page 15), les multipodes ne peuvent pas être AP lorsque $k \geq 5$; c'est une contradiction. \square

Ainsi, si le nombre de branches des ballons AP n'est pas majoré [3], celui des ballons AP+1 est très restreint puisque ces derniers ne peuvent qu'être des 2-ballons, 3-ballons, ou 4-ballons. Les 2-ballons étant isomorphes aux cycles, on remarquera qu'ils sont toujours AP+1 (Observation 5 page 21).

Le cas des 3-ballons n'est pas aussi simple à traiter à cause du lien direct avec la partition arbitraire des tripodes. Pour s'en convaincre, nous allons étudier la partition arbitraire avec une préaffectation d'un ensemble de 3-ballons très simples, à savoir ceux de forme $B(1, 1, p)$.

Pour cela, nous allons avoir besoin d'utiliser de nouveau le Lemme 1 (page 25) sur les 3-ballons sectionnés AP de forme $CB(p_1, p_2, 1, 1)$. En effet, pour prouver qu'un ballon $B = B(1, 1, p)$ est AP+1, il va être nécessaire de montrer que les sommets c_1, \dots, c_p de sa branche de taille p sont bien q -fixables pour tout $q \in [1, n-1]$. Or, il est facile de voir que pour certains

sommets c_i , les plus centraux de la branche, et de petites valeurs de q , il ne va pas être possible de trouver de sous-ensemble S_q de q sommets contenant c_i ainsi que tous les sommets entre celui-ci et l'une des racines du ballon. De ce fait, si un S_q permettant de q -fixer c_i dans B existe, le sous-graphe $B[V \setminus S_q]$ sera nécessairement isomorphe à un 3-ballon sectionné de forme $CB(p_1, p_2, 1, 1)$.

Proposition 7 :

Soit $p \geq 1$ un entier. Le 3-ballon $B(1, 1, p)$ est AP+1 ssi p est pair.

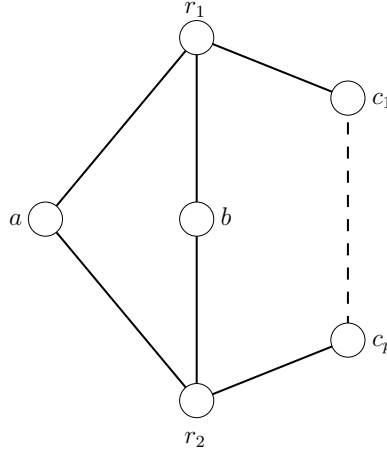


Figure 2.9 – Le 3-ballon $B(1, 1, p)$

Preuve :

Nous allons prouver l'équivalence dans les deux sens en utilisant les notations de la figure 2.9 :

\Rightarrow) Il est facile de voir que si $p \geq 1$ est impair, alors le 3-ballon $B = B(1, 1, p)$ ne peut pas être AP+1. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le sous-graphe $B[V \setminus \{r_1\}]$, obtenu en 1-fixant r_1 dans B , n'est pas AP car il est isomorphe à la chenille $Cat(2, p + 1)$ qui n'admet pas de couplage parfait et donc pas de réalisation de la 2-séquence $(2, \dots, 2)$ qui est admissible pour son ordre. B n'est donc pas AP+1 lorsque p est impair puisque l'un de ses sommets n'y est pas 1-fixable.

\Leftarrow) Soit $p \geq 2$ un nombre pair; nous allons prouver que $B = B(1, 1, p)$ est bien un graphe AP+1. Pour cela, nous allons montrer que tous ses sommets y sont q -fixables pour tout $q \in [1, p + 3]$. Nous allons simplifier cette vérification au maximum grâce aux méthodes que nous avons présentées dans la section 2.2.2 (page 21).

Pour commencer, nous pouvons nous appuyer sur l'Observation 6 (page 23) pour définir les classes de sommets similaires de B permettant de limiter le nombre de sommets desquels nous devons vérifier la fixabilité. Ici, il est facile de voir que nous pouvons nous restreindre à $\frac{p}{2} + 2$ classes, à savoir $[a]_A = \{a, b\}$, $[r_1]_A = \{r_1, r_2\}$, et $[c_i]_A = \{c_i, c_{p-i+1}\}$, $\forall i \in [1, \frac{p}{2}]$.

Nous avons également vu qu'il n'est pas toujours nécessaire de vérifier la q -fixabilité d'un sommet v dans un graphe pour tout $q \in [1, n - 1]$ puisqu'il est possible de s'arrêter à $d_T(v) - 1$ (Observation 7 page 24). Nous allons appliquer cette méthode de simplification à B ; la distance à traçabilité de chaque sommet de B définissant ses classes de sommets similaires est donnée dans la table 2.9.

Table 2.9 – Distances à traçabilité des sommets représentants du graphe $B(1, 1, p)$

| $v \in V$ | $d_T(v)$ | S_d |
|------------------------------|----------|-----------------------|
| a | 1 | $\{a\}$ |
| r_1 | 2 | $\{a, r_1\}$ |
| $c_{i \in [1, \frac{p}{2}]}$ | i | $\{c_1, \dots, c_i\}$ |

Il ne nous reste plus qu'à prouver que chaque sommet v définissant une classe de sommets similaires de B est bien q -fixable dans celui-ci pour tout $q \in [1, d_T(v) - 1]$. Pour les sommets de la branche de taille p de B , on se rappellera notamment qu'un 3-ballon sectionné de forme $CB(p_1, p_2, 1, 1)$ est AP dès que p_1 et p_2 ne sont pas tous les deux impairs (Lemme 1 page 25). Les sous-ensembles de sommets S_q à choisir pour chacun des sommets représentants de B et pour toutes les valeurs de q correspondantes sont donnés dans la table 2.10; notons que les sommets a et c_1 n'apparaissent pas dans celle-ci puisque, ayant une distance à traçabilité de 1, leur fixabilité dans B est immédiate d'après l'Observation 7 (page 24).

Table 2.10 – Choix des S_q pour la fixabilité de chaque sommet de $B = B(1, 1, p)$

| $v \in V$ | q | S_q | $B[V \setminus S_q]$ |
|------------------------|----------------------------|---------------------------------|--|
| r_1 | 1 | $\{r_1\}$ | Is. à $Cat(2, p + 1)$ |
| c_i, i pair | $q \in [1, i - 1],$ pair | $\{c_{i-1}, \dots, c_{i+q-2}\}$ | Is. à $CB(i - 2, p - (i + q - 2), 1, 1)$ |
| | $q \in [1, i - 1],$ impair | $\{c_i, \dots, c_{i+q-1}\}$ | Is. à $CB(i - 1, p - (i + q - 1), 1, 1)$ |
| $c_i, i \geq 3$ impair | $q \in [1, i - 1]$ | $\{c_i, \dots, c_{i+q-1}\}$ | Is. à $CB(i - 1, p - (i + q - 1), 1, 1)$ |

□

Il serait intéressant d'étudier plus longuement la partition arbitraire avec une préaffectation des 3-ballons, mais ceux-ci ne nous sont d'aucune utilité pour répondre à la Question 1 (page 32) puisque ces derniers sont tous traçables et donc R-AP d'après la hiérarchie des versions de la partition arbitraire (Théorème 4 page 15).

Les ballons à quatre branches sont donc ceux qui nous intéressent le plus dans le cadre de l'étude des ballons AP+1. Cependant, avant de commencer à nous focaliser sur eux, il est important de se poser la question de l'existence de 4-ballons AP non R-AP. En effet, si l'on arrive à trouver un 4-ballon AP+1, il n'a d'intérêt pour nous que si sa partition arbitraire n'est pas réursive. Dans le cas contraire, il ne nous servirait qu'à confirmer de nouveau qu'il existe bien des graphes AP+1 qui sont R-AP.

Comme nous le verrons dans la section 3.2 (page 53), nous avons pu exhiber un 4-ballon AP non R-AP, à savoir $B(4, 5, 5, 7)$, qui légitime, vis-à-vis de la Question 1 (page 32), l'étude des 4-ballons AP+1 que nous allons mener ci-après.

La relation que nous avons mise en évidence entre les k -ballons AP+1 et les k -podes obtenus en y 1-fixant l'une de leurs racines (Propriété 1 page 33) permet, appliquée aux ballons à quatre branches, de cerner davantage la forme de ceux étant potentiellement AP+1 :

Propriété 2 :

Si le 4-ballon $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ est AP+1, alors $b_1 = 1$.

Preuve :

Cette propriété structurelle découle directement de la Propriété 1 (page 33) : si le 4-ballon $B = B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ est AP+1, alors le 4-pode $P(b_1, b_2, b_3, b_4)$ est nécessairement AP. Or, d'après le Théorème 2 (page 15), un 4-pode ne peut être AP que s'il possède un bras de longueur 1 ; de là, on en déduit que l'on a $b_1 = 1$. \square

Ainsi, pour trouver des 4-ballons AP+1, nous ne devons faire jouer la longueur que de leurs trois plus grandes branches. Dans la partie suivante, nous allons commencer par montrer qu'il n'en existe aucun ayant un ordre peu élevé.

2.4.2 Éviction d'ensembles de petits 4-ballons n'étant pas AP+1

Comme nous l'avons vu, la vérification de la partition arbitraire avec une préaffectation d'un graphe est d'autant plus fastidieuse que l'ordre de celui-ci est élevé. Ainsi, l'approche la plus naturelle pour tenter de trouver un 4-ballon AP+1 est de commencer par étudier ceux ayant des branches de petite longueur.

Proposition 8 :

Soit $p \geq 1$ un entier. Le 4-ballon $B(1, 1, 1, p)$ n'est pas AP+1.

Preuve :

Soit $B = B(1, 1, 1, p)$ un 4-ballon pour un $p \geq 1$ quelconque. Considérons la parité de p :

- Si p est impair, alors B est d'ordre pair et contient quatre branches de longueur impaire. Or, d'après une propriété donnée par Gilbert [9], les ballons d'ordre pair contenant au moins trois branches de longueur impaire ne peuvent pas être AP. B n'est donc pas AP, et ne peut donc pas être AP+1 (Proposition 1 page 19).
- Supposons désormais que p soit pair, et considérons le 4-pode $P(1, 1, 1, p)$ obtenu en 1-fixant l'une des racines de B . Celui-ci est d'ordre pair et il est facile de voir qu'il n'admet pas de couplage parfait ; il ne peut donc pas être AP puisque cela implique que la 2-séquence $(2, \dots, 2)$ n'y est pas réalisable. Les racines de B n'étant pas 1-fixables dans celui-ci, il n'est donc, par définition, pas AP+1.

Finalement, nous trouvons une contradiction quelque soit la parité de p ; un 4-ballon de forme $B(1, 1, 1, p)$ ne peut donc pas être AP+1. \square

Proposition 9 :

Soit $p \geq 1$ un entier. Le 4-ballon $B(1, 1, 2, p)$ n'est pas AP+1.

Preuve :

Soit B un 4-ballon de forme $B(1, 1, 2, p)$. Nous allons déterminer précisément les valeurs pouvant être prises par p vis-à-vis du 4-pode $P(1, 1, 2, p)$, puis montrer que pour celles-ci B ne peut pas être AP+1. Les notations que nous allons utiliser sont celles de la figure 2.10.

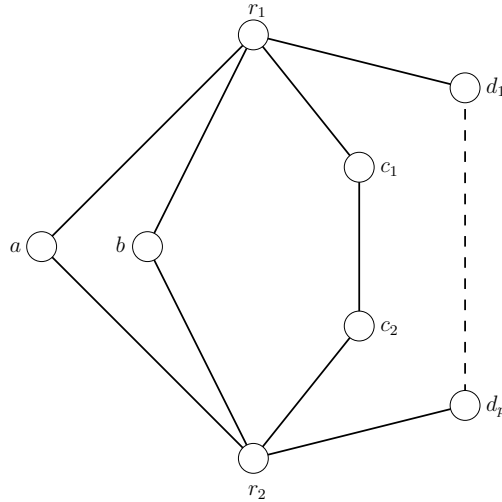


Figure 2.10 – Le ballon $B(1, 1, 2, p)$

Pour que B soit AP+1, il faut que le 4-pode $P(1, 1, 2, p)$ obtenu en y 1-fixant la racine r_1 soit AP (Propriété 1 page 33). Or, d’après un lemme de Barth et al. [2], les 4-podes de forme $P(1, 1, p_1, p_2)$ sont AP ssi :

- p_1 et p_2 sont tous les deux pairs,
- $p_1 \not\equiv 1 \pmod 3$ ou $p_2 \not\equiv 1 \pmod 3$,
- le 3-pode $P(2, p_1, p_2)$ est AP.

Dans notre cas, pour que B soit AP+1, on en déduit que p doit être pair et de valeur telle que le tripode $P = P(2, 2, p)$ soit AP.

Pour que P soit AP, on doit tout d’abord avoir $p \equiv 0 \pmod 3$. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas et considérons la séquence composée principalement de 3, à savoir $\tau_{\sim 3} = (p + 5 \pmod 3, \dots, 3)$, qui est bien admissible pour l’ordre de P quelle que soit la valeur de p modulo 3. Pour réaliser cette dernière dans P , les sous-ensembles de sommets de taille 3 ne peuvent que contenir des éléments de son bras de taille p ; en effet, choisir un sous-ensemble de trois sommets en partant de l’extrémité de l’un de ses bras de taille 2 le déconnecterait. Après avoir choisi tous les sous-ensembles de sommets de taille 3 sur le bras de longueur p de P sauf deux, le sous-graphe obtenu est isomorphe à $P(1, 2, 2)$ (si $p \equiv 1 \pmod 3$) ou à $P(2, 2, 2)$ (si $p \equiv 2 \pmod 3$) (voir figure 2.11), et il est facile de voir que la séquence restante, $(3, 3)$ dans le premier cas ou $(1, 3, 3)$ dans le second, n’est pas réalisable dans celui-ci. $\tau_{\sim 3}$ n’est donc pas réalisable dans P , ce qui contredit sa partition arbitraire lorsque $p \equiv 0 \pmod 3$.

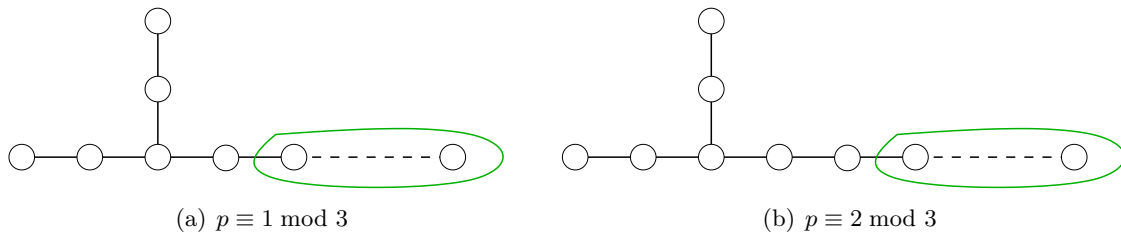


Figure 2.11 – Tripodes résultant du choix de sous-ensembles de sommets de taille 3 dans $P(2, 2, p)$

De plus, pour la partition arbitraire de P , on doit avoir $p \equiv 0 \pmod{4}$. Tout d'abord, on ne peut pas avoir $p \equiv 1 \pmod{4}$ ou $p \equiv 3 \pmod{4}$ puisque p doit être pair. Supposons maintenant que $p \equiv 2 \pmod{4}$, et considérons la séquence $\tau_{\sim 4} = (3, 4, \dots, 4)$ contenant une majorité de 4, qui est bien admissible pour l'ordre de P puisque $n(P) = 7 + 4l = 3 + 4 \cdot (l + 1)$, $l \geq 0$. De la même manière que pour la séquence $\tau_{\sim 3}$, les sous-ensembles de sommets de taille 4 de $\tau_{\sim 4}$ ne peuvent être choisis que sur le bras de longueur p de P afin de ne pas le déconnecter. Après avoir choisi tous les sous-ensembles de taille 4 de cette manière sauf un, le sous-graphe restant est isomorphe à $P(2, 2, 2)$, dans lequel la séquence restante, $(3, 4)$, n'est pas réalisable. Ainsi, $\tau_{\sim 4}$ n'est pas réalisable dans P lorsque $p \equiv 2 \pmod{4}$, qui n'est alors pas AP sous cette condition.

Pour résumer, pour que B soit AP+1, on doit donc avoir $p \equiv 0 \pmod{12}$. Notons $n = 6 + 12l'$ son ordre, avec $l' \geq 1$, et considérons la 2-fixabilité dans celui-ci de son sommet d_3 ; deux choix de sous-ensembles de deux sommets sont alors possibles (voir figure 2.12) :

- $S_2 = \{d_2, d_3\}$. $B[V \setminus S_2]$ est d'ordre $n' = n - 2 = 4 + 12l' = 2 \cdot (2 + 6l')$. La 2-séquence $(2, \dots, 2)$ est donc admissible pour n' , mais $B[V \setminus S_2]$ n'admettant pas de couplage parfait, elle n'est pas réalisable dans ce dernier.
- $S_2 = \{d_3, d_4\}$. L'ordre de $B[V \setminus S_2]$ est le même que précédemment, à savoir $n' = 4 + 12l' = 1 + 3 \cdot (1 + 4l')$. La séquence $(1, 3, \dots, 3)$ est donc admissible pour n' , mais ici également on peut facilement vérifier qu'elle n'est pas réalisable dans $B[V \setminus S_2]$.

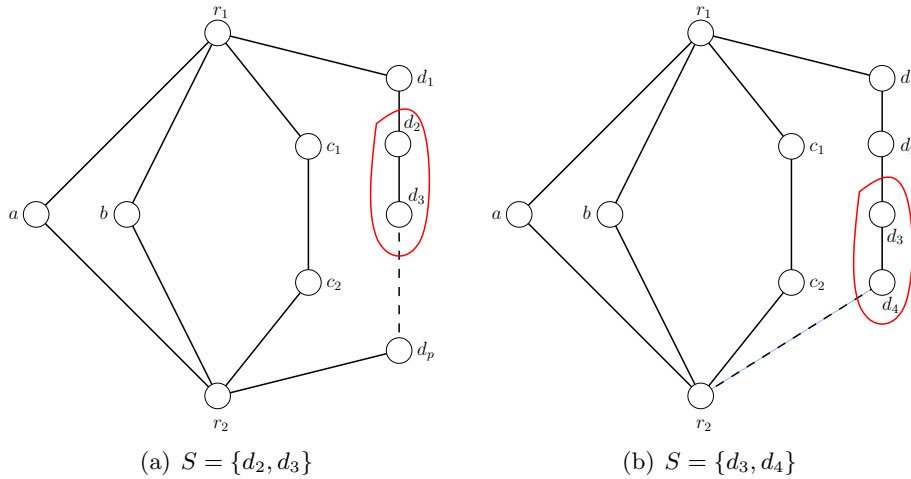


Figure 2.12 – Possibilités pour 2-fixer le sommet d_2 dans $B(1, 1, 2, p)$

Ainsi, nous avons commencé par déterminer précisément la longueur pouvant être prise par la quatrième branche d'un ballon de forme $B(1, 1, 2, p)$ potentiellement AP+1. Nous avons ensuite vu que, pour une telle valeur de p , le 4-ballon résultant possède toujours un sommet n'y étant pas 2-fixable. De ce fait, les 4-ballons de profil $B(1, 1, 2, p)$ ne sont jamais AP+1. \square

L'étude d'ensembles de petits 4-ballons ayant trois branches de petite longueur n'ayant pas permis d'en trouver étant arbitrairement partitionnables avec une préaffection, nous allons désormais mettre en évidence des critères généraux devant être vérifiés par les 4-ballons pour qu'ils soient potentiellement AP+1.

2.4.3 Conditions nécessaires sur la longueur des branches des 4-ballons AP+1

Le but de cette partie est d'étudier les 4-ballons AP+1 dans un cadre plus général que celui d'ensembles de petits ballons ayant un profil donné. Plus précisément, nous allons donner des conditions nécessaires devant être vérifiées par la longueur de chacune de leurs branches en nous basant notamment sur la fixabilité de certains de leurs sommets.

Il est facilement observable que la structure des graphes AP+1 est davantage dépendante de la q -fixabilité de leurs sommets pour de petites valeurs de q que pour de grandes. En effet, plus q est grand, et plus il y a de possibilités pour q -fixer un sommet dans ceux-ci et donc de chances d'y arriver. À ce titre, la q -fixabilité de certains sommets des 4-ballons AP+1 dans ces derniers pour de petites valeurs de q est porteuse d'informations permettant d'affiner leur forme.

Les graphes AP+1 étant nécessairement AP (Proposition 1 page 19), nous pouvons en déduire immédiatement que les 4-ballons nous intéressant possèdent au plus trois branches de longueur impaire puisque, d'après un résultat de Gilbert, les ballons d'ordre pair ne peuvent pas être AP s'ils en possèdent plus [9]. En utilisant la 1-fixabilité des racines des 4-ballons potentiellement AP+1, nous allons montrer qu'en réalité ces derniers ne peuvent avoir qu'une ou deux branches de longueur impaire :

Propriété 3 :

Si le 4-ballon $B(1, b, c, d)$ est AP+1, alors au moins deux valeurs de l'ensemble $\{b, c, d\}$ sont paires.

Preuve :

Supposons que c et d soient impairs et que $B = (1, b, c, d)$ soit AP+1. b est nécessairement pair sinon cela contredirait la partition arbitraire de B qui posséderait alors quatre branches de longueur impaire tout en étant d'ordre pair (argument dû à Gilbert [9]). Remarquons que B est d'ordre $n = 3 + b + c + d$, qui est alors impair d'après nos hypothèses de départ.

Si $c = d = 1$, alors le sous-graphe obtenu en 1-fixant l'une des racines dans B est isomorphe au 4-pode $P(1, 1, 1, b)$ qui n'est pas AP puisque la séquence $(2, \dots, 2)$ n'y est pas réalisable. En conséquence, si $c = d = 1$, alors B ne peut pas être AP+1.

Supposons donc, sans perte de généralité, que l'on ait $d \geq 3$. Dénotons successivement par v_1, \dots, v_d les sommets appartenant à la branche de taille d de B , et considérons la 1-fixabilité du sommet v_2 dans celui-ci. Le sous-graphe $B[V \setminus \{v_2\}]$ est isomorphe au 4-ballon sectionné $CB(1, d-2, 1, b, c)$ qui n'est pas AP puisqu'il est d'ordre pair et que ses deux chaînes sont de longueur impaire (argument semblable à celui que nous avons utilisé pour prouver le Lemme 1 page 25). De ce fait, le sommet v_2 de B n'est pas 1-fixable dans ce dernier, ce qui contredit le fait qu'il soit AP+1 lorsque $d \geq 3$.

Finalement, si deux valeurs de l'ensemble $\{b, c, d\}$ sont impaires, le 4-ballon $B(1, b, c, d)$ ne peut pas être AP+1 ; de ce fait, au moins deux d'entre elles doivent être paires si l'on souhaite qu'un tel ballon soit potentiellement AP+1. \square

Nous allons désormais affiner davantage la forme des 4-ballons potentiellement AP+1 grâce à l'utilisation de la Propriété 1 (page 33). Plus précisément, nous allons montrer que si les longueurs des branches d'un 4-ballon vérifient une certaine relation, alors certains 4-podes obtenus en 1-fixant l'une de leurs racines ne peuvent pas être AP.

Propriété 4 :

Si le 4-ballon $B(1, b, c, d)$ est AP+1, alors $\text{pgcd}(b + 1, c + d + 1) = 1$, $\text{pgcd}(c + 1, b + d + 1) = 1$ et $\text{pgcd}(d + 1, b + c + 1) = 1$.

Preuve :

Supposons que $B = B(1, b, c, d)$ soit un 4-ballon AP+1 dont les paramètres vérifient $\text{pgcd}(b + 1, c + d + 1) = l \geq 2$. Remarquons que $n - 1 = 2 + b + c + d$ et donc que $n - 1 \equiv 0 \pmod{l}$, ce qui signifie que la l -séquence $\tau_l = (l, \dots, l)$ est admissible pour l'ordre de $B[V \setminus \{v\}]$, $\forall v \in V$.

Pour arriver à une contradiction, il suffit d'observer que, sous ces conditions, le sous-graphe résultant de la 1-fixabilité de l'une des deux racines de B dans celui-ci est isomorphe au 4-pode $P = P(1, b, c, d)$ qui n'est pas AP. En effet, la séquence τ_l est admissible pour son ordre, mais il est facile de voir qu'elle n'y est pas réalisable : en choisissant des sous-ensembles de l sommets en partant de l'extrémité du bras de longueur b de P , on en vient nécessairement à inclure sa racine dans l'un de ceux-ci puisque $b + 1 \equiv 0 \pmod{l}$. Cela déconnecte alors P , ce qui empêche, puisque $l \geq 2$, de placer le sommet de son bras de taille 1 dans un sous-ensemble de l de ses sommets induisant un sous-graphe connexe. P n'étant donc pas AP, les racines de B ne sont pas 1-fixables dans celui-ci qui ne peut alors pas être AP+1.

La preuve est analogue lorsque $\text{pgcd}(c + 1, b + d + 1) \geq 2$ ou $\text{pgcd}(d + 1, b + c + 1) \geq 2$. \square

Comme nous l'avons évoqué, la différence entre la 1-fixabilité et la 2-fixabilité est que cette dernière permet plus de possibilités : en effet, s'il n'y a qu'un choix possible pour 1-fixer un sommet v dans un graphe ($S_1 = \{v\}$), il y en a $d(v)$ pour l'y 2-fixer. De là, il est facilement observable que la structure d'un graphe AP+1 est davantage liée à la 2-fixabilité de ses sommets ayant peu de voisins qu'à celle de ses sommets ayant un degré élevé.

La propriété suivante repose donc sur la 2-fixabilité du sommet v de la branche de taille 1 d'un 4-ballon B potentiellement AP+1 (Propriété 2 page 36). Celle-ci est intéressante puisque ce sommet ne possède que deux voisins, qui ont, en plus, la particularité d'être similaires ; ce fait implique qu'il n'existe en réalité qu'une possibilité pour 2-fixer v dans B :

Propriété 5 :

Si le 4-ballon $B(1, b, c, d)$ est AP+1, alors $P(b, c, d)$ est AP.

Preuve :

Dénotons par v le sommet de $B = B(1, b, c, d)$ appartenant à sa branche de longueur 1, et par r_1 et r_2 ses racines. Considérons la 2-fixabilité de v dans B : il est facile de voir que les deux seules possibilités sont $S_2^1 = \{v, r_1\}$ et $S_2^2 = \{v, r_2\}$. Or, r_1 et r_2 étant des sommet similaires de B au sens de la Définition 3 (page 23), remarquons que $B[V \setminus S_2^1] \simeq B[V \setminus S_2^2]$. Ainsi, v n'est 2-fixable dans B que si $B[V \setminus S_2^1]$ est AP, autrement dit si $P(b, c, d)$ l'est. \square

Une dernière propriété des 4-ballons AP+1 que l'on peut exhiber est basée sur le fait que lorsque l'on essaye de 2-fixer des sommets dans de tels ballons d'ordre pair, les sous-graphes résultants sont également d'ordre pair et doivent donc admettre un couplage parfait. Pour des profils de ballons précis, cela implique que la 2-fixabilité de certains de leurs sommets est unique, et donc, pour qu'ils soient arbitrairement partitionnables avec une préaffectation, que certains de leurs sous-graphes doivent être AP.

Proposition 10 :

Soit $B = B(1, b, c, d)$ un 4-ballon avec $b \geq 1$ impair, et $c \geq 2$ et $d \geq 2$ pairs. Si $c \geq 6$ ou $d \geq 6$, notons p l'une de ces deux valeurs, dénotons par v_1, \dots, v_p les sommets de la branche de longueur p de B , et considérons un $i \in [3, p - 2]$. Si v_i est 2-fixable dans B , c'est dans le sous-ensemble $S_2 = \{v_i, v_{i+1}\}$ si i est impair, dans $S_2 = \{v_{i-1}, v_i\}$ sinon.

Cette proposition découle de l'argument sur les ballons sectionnés qui nous a servi à prouver le Lemme 1 (page 25) : si l'on ne choisit pas le sous-ensemble S_2 incluant v_i comme précisé, le sous-graphe $B[V \setminus S_2]$ est alors nécessairement isomorphe à un 4-ballon sectionné d'ordre pair ayant ses deux chaînes de longueur impaire. Or, un tel graphe, rappelons-le, n'admet pas de couplage parfait et n'est donc jamais AP ; choisir un tel sous-ensemble de deux sommets n'est donc pas valable pour 2-fixer v_i dans B . Cette proposition est intéressante puisqu'elle implique qu'un 4-ballon d'ordre pair ne peut être AP+1 que si tous les 4-ballons sectionnés obtenus en 2-fixant les sommets de ses branches de longueur impaire de cette manière sont AP.

Nous avons implémenté un algorithme permettant de trouver des 4-ballons potentiellement AP+1, à savoir ceux vérifiant la contrainte du 4-pode obtenu en y 1-fixant l'une de leurs racines (Propriété 1 page 33) ainsi que les différentes restrictions sur la longueur de chacune de leurs branches que nous venons de mettre en évidence (Propriétés 3 page 39 à 5 page précédente). Parmi les différentes constatations que nous avons pu tirer de cet échantillon de 4-ballons potentiellement AP+1, que nous présenterons à la fin de cette section, citons notamment le fait que ceux-ci possèdent nécessairement une branche ayant pour longueur un multiple de 4 ; nous prouvons cette propriété ci-dessous.

Propriété 6 :

Si le 4-ballon $B(1, b, c, d)$ est AP+1, alors l'une des valeurs de l'ensemble $\{b, c, d\}$ est un multiple de 4.

Preuve :

Supposons que $B = B(1, b, c, d)$ soit AP+1 sans avoir de branche de longueur un multiple de 4. D'après la Propriété 3 (page 39), au moins deux des entiers b, c et d sont pairs. Sans perte de généralité, imaginons que l'on ait $c \geq 2$ et $d \geq 2$ pairs ; par hypothèse, nous avons donc $c \equiv 2 \pmod{4}$ et $d \equiv 2 \pmod{4}$. b pouvant être pair ou impair, son reste modulo 4 peut prendre trois valeurs différentes :

- Si $b \equiv 1 \pmod{4}$, B est d'ordre $n = 4l$ avec $l \geq 2$. En 1-fixant l'une des racines r de B dans celui-ci, nous obtenons le 4-pode $P(1, b, c, d)$ d'ordre $n - 1 = 3 + 4 \cdot (l - 1)$. Or, il est facile de voir que ce dernier n'est pas AP puisque la séquence $(3, 4, \dots, 4)$ est admissible pour son ordre mais n'y est pas réalisable. r n'étant pas 1-fixable dans B , ce dernier n'est pas AP+1 lorsque $b \equiv 1 \pmod{4}$.
- Si $b \equiv 2 \pmod{4}$, nous avons alors $n = 1 + 4l'$ où $l' \geq 2$. De la même manière que précédemment, il est facilement observable que le 4-pode $P(1, b, c, d)$, obtenu en 1-fixant l'une des racines de B , n'est pas AP puisque la 4-séquence $(4, \dots, 4)$ est admissible pour son ordre mais n'y est pas réalisable. Les racines de B n'étant pas 1-fixables dans celui-ci, il ne peut pas être AP lorsque $b \equiv 2 \pmod{4}$.
- Si $b \equiv 3 \pmod{4}$, b est impair, et l'ordre de B est alors de $n = 2 + 4l''$, $l'' \geq 2$. L'argument que nous avons utilisé dans les deux cas précédents peut alors être de nouveau utilisé ; en effet, en 2-fixant le sommet de la branche de longueur 1 de B nous obtenons nécessairement un sous-graphe isomorphe au 3-pode $P(b, c, d)$. Or, celui-ci n'est pas AP puisque la séquence $(4, \dots, 4)$ n'est pas réalisable dans celui-ci ; cela implique que B ne peut pas être AP lorsque $c \equiv 3 \pmod{4}$.

Si B ne possède pas de branche de longueur un multiple de 4, nous venons de montrer que ce dernier possède toujours un sommet non q -fixable pour un certain q ; ainsi, si B est AP+1, il possède nécessairement une branche ayant une telle longueur. \square

Enfin, la partition arbitraire avec une préaffectation d'une bonne partie des 4-ballons extraits par notre algorithme peut être infirmée par un nouvel argument relatif à la partition arbitraire de certains 4-ballons sectionnés ayant un profil particulier :

Proposition 11 :

Soit $B = B(1, b, c, d)$ un 4-ballon. Si $n \equiv 0 \pmod{3}$, b est impair, $c \equiv 0 \pmod{3}$, $c \geq 6$, $d \equiv 0 \pmod{4}$, et $d \not\equiv 0 \pmod{3}$, alors B n'est pas AP+1.

Preuve :

Supposons que B soit AP+1 sous ces conditions ; comme b est impair, alors, d'après la Propriété 3 (page 39), c et d sont tous les deux pairs. Dénotons par v_1, \dots, v_c les sommets appartenant à la branche de longueur c de B , et considérons la 2-fixabilité de v_3 dans celui-ci. L'ordre de B et c étant pairs, d'après la Proposition 10 (page 40) le seul sous-ensemble de sommets possible pour y 2-fixer v_3 est $S_2 = \{v_3, v_4\}$. Le sous-graphe $B[V \setminus S_2]$ restant est alors isomorphe au 4-ballon sectionné $CB(2, 2 + 3l, 1, b, d)$, $l \geq 0$, qui est d'ordre $n - 2 \equiv 1 \pmod{3}$. La séquence $(1, 3, \dots, 3)$ est donc admissible pour son ordre, mais il est facilement vérifiable qu'elle n'est pas réalisable dans celui-ci. Ainsi, v_3 n'est pas 2-fixable dans B ce qui contredit le fait qu'il soit AP+1. \square

Notons que la proposition précédente tient également si l'on inverse les contraintes sur c et sur d , c'est-à-dire lorsque $d \equiv 0 \pmod{3}$, $d \geq 6$, $c \equiv 0 \pmod{4}$, et $c \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Finalement, nous résumons, dans le théorème suivant, l'ensemble des condition nécessaires que nous avons pu extraire tout au long de cette section pour la partition arbitraire avec une préaffectation d'un 4-ballon :

Théorème 6 :

Si le 4-ballon $B(1, b, c, d)$ est AP+1, alors :

- $P(1, b, c, d)$ est AP,
- $P(b, c, d)$ est AP,
- $\text{pgcd}(b + 1, c + d + 1) = 1$, $\text{pgcd}(c + 1, b + d + 1) = 1$ et $\text{pgcd}(d + 1, b + c + 1) = 1$,
- au moins deux valeurs de l'ensemble $\{b, c, d\}$ sont paires,
- au moins une valeur de l'ensemble $\{b, c, d\}$ est un multiple de 4.

La table 2.11 récapitule l'ensemble des 4-ballons potentiellement AP+1, vérifiant l'intégralité des conditions données par le Théorème 6, que nous avons pu obtenir grâce à un programme informatique :

Table 2.11 – Liste des 4-ballons potentiellement AP+1 d'ordre $n \leq 70$

| n | $B(1, b \leq 4, c \leq 20, d \leq 40)$ |
|-----|--|
| 33 | $B(1, 2, 12, 16)$ |
| 34 | $B(1, 1, 6, 24), B(1, 1, 12, 18)$ |
| 46 | $B(1, 1, 12, 30)$ |
| 48 | $B(1, 2, 12, 31)$ |
| 51 | $B(1, 2, 16, 30)$ |
| 52 | $B(1, 1, 12, 36)$ |
| 54 | $B(1, 1, 14, 36)$ |
| 60 | $B(1, 2, 19, 36)$ |

Notre étude des ballons AP+1 ne nous ayant finalement pas permis d'en exhiber un, elle n'apporte pas réellement d'éléments de réponse pour pouvoir négocier la Question 1 (page 32) que nous avons posée. Il serait néanmoins intéressant de continuer nos travaux, par exemple en étudiant les 4-ballons candidats de la table 2.11 précédente au cas par cas afin d'en identifier un réellement AP+1 ou, dans le cas contraire, de trouver de nouveaux arguments pour infirmer la partition arbitraire avec une préaffectation d'un 4-ballon. Cependant, la vérification de leur partition arbitraire avec une préaffectation doit certainement être fastidieuse à mener car leur ordre est relativement élevé ; pour améliorer les choses, il serait alors probablement intéressant d'étudier la partition arbitraire des 4-ballons sectionnés qui jouent un rôle important dans la structure des 4-ballons AP+1.

2.5 À propos de la préaffectation de $k \geq 2$ sommets

Dans les sections précédentes, nous nous sommes principalement focalisés sur les graphes AP+1 dans le but d'opérer une première approche de la notion de partition arbitraire avec préaffectations. Nous avons notamment extrait des propriétés des graphes AP+1 et avons réussi à montrer l'existence de certains d'entre eux ; il apparaît maintenant légitime de se poser les mêmes questions lorsque l'on s'autorise davantage de préaffectations.

2.5.1 Définitions et généralités

Pour commencer, nous allons donner une définition générale de la notion de partition arbitraire avec k préaffectations :

Définition 7 :

Soient G un graphe, k de ses sommets distincts v_1, \dots, v_k , et k entiers positifs non nuls q_1, \dots, q_k tels que $\sum_{i=1}^k q_i \leq n - 1$. Le k -uplet (v_1, \dots, v_k) est dit (q_1, \dots, q_k) -fixable dans G si on peut trouver k sous-ensembles disjoints de sommets (S_1, \dots, S_k) de V tels que $\forall i \in [1, k]$, on ait $v_i \in S_i$, $G[S_i]$ connexe d'ordre q_i , et $G[V \setminus \bigcup_{i=1}^k S_i]$ AP.

Définition 8 :

Soit G un graphe AP. G est dit arbitrairement partitionnable avec k préaffectations (AP+k en abrégé) si tout k -uplet (v_1, \dots, v_k) de ses sommets distincts est (q_1, \dots, q_k) -fixable dans celui-ci pour tout k -uplet (q_1, \dots, q_k) d'entiers positifs tels que $\sum_{i=1}^k q_i \leq n - 1$.

Il aurait bien entendu été possible de définir la notion de préaffectation de sommets en faisant en sorte qu'elle ait un rapport plus étroit avec la réalisation de séquences dans un graphe ; par exemple, nous aurions pu définir un graphe G AP+k comme étant un graphe dans lequel, pour toute séquence τ admissible pour n , il est possible de trouver une réalisation R de τ dans celui-ci de sorte que k de ses sommets bien précis appartiennent chacun à un sous-ensemble de R dont la taille a été préalablement choisie. Cependant, une telle définition impliquerait des cas particuliers entraînant leur lot de complications. Notamment, comment faire pour imposer la présence de k sommets de G dans k sous-ensembles bien précis de R si $|\tau| < k$? Une solution pourrait consister à s'autoriser la préaffectation de deux sommets u et v de G au sein d'un même sous-ensemble de taille $l \geq 2$, mais cela pourrait ne pas être toujours possible, notamment si la distance minimale entre u et v dans G est strictement supérieure à l .

Ainsi, le fait de ne pas inclure la notion de réalisation de séquence dans la définition de la partition arbitraire avec k préaffectations nous semble être le meilleur moyen pour que celle-ci soit correcte.

Ce détail clarifié, nous allons maintenant démontrer que la propriété de connexité des graphes AP+1 se retrouve dans le cas général, ce qui permet d'avoir une première bonne idée de la forme des graphes AP+k.

Observation 8 :

Soit G un graphe, et $k \geq 1$ un entier. Si G est AP+k, alors G est $(k + 1)$ -connexe.

Preuve :

Supposons que G soit AP+k tout en étant de connectivité $p \leq k$. Considérons alors le k -uplet (v_1, \dots, v_k) de sommets de G choisis de la manière suivante :

- les sommets v_1, \dots, v_p forment un ensemble d'articulation de G , le déconnectant en $l \geq 2$ composantes connexes,
- les sommets v_{p+1}, \dots, v_k sont choisis dans ces l composantes connexes de sorte que $G[V \setminus \{v_1, \dots, v_k\}]$ contienne au moins deux composantes connexes.

Il est alors assez simple de voir que dans ce cas, (v_1, \dots, v_k) n'est pas $(1, \dots, 1)$ -fixable dans G puisque le reste du graphe n'est pas connexe et donc pas AP ; ceci contredit le fait G soit AP+k lorsque celui-ci n'est pas suffisamment connexe. \square

Puisque le nombre d'arêtes d'un graphe est d'autant plus grand (relativement à son nombre de sommets) que sa connectivité est forte, on pourrait se demander s'il n'existe pas un $k \geq 2$ constant à partir duquel tout graphe k -connexe serait nécessairement AP+($k - 1$). Ce n'est en réalité pas le cas car, étant donné un tel k quelconque, il est toujours possible de trouver un graphe k -connexe n'étant pas AP, et donc pas AP+($k - 1$) :

Observation 9 :

Il n'existe pas de $k \geq 2$ constant tel que tout graphe k -connexe soit nécessairement AP+($k - 1$).

Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer le graphe biparti complet $K_{k,k+2}$: celui-ci est bien k -connexe mais il est d'ordre pair et n'admet pas de couplage parfait ; la 2-séquence $(2, \dots, 2)$ n'y est donc pas réalisable, ce qui implique qu'il n'est pas AP.

En revanche, étant donné un $k \geq 1$ quelconque, il existe toujours des graphes étant AP+k, à savoir les graphes complets à au moins k sommets. De tels graphes sont bien $(k + 1)$ -connexes, et il est assez facile de voir qu'ils sont également AP+k puisque tout graphe complet est connexe et arbitrairement partitionnable.

Observation 10 :

Soit $k \geq 1$ un entier constant. Tous les graphes complets d'ordre $n \geq k$ sont AP+k.

Dans la partie suivante, nous proposons de terminer notre étude des graphes arbitrairement partitionnables avec k préaffectations en présentant une classe de graphes AP+2 différente de celles des graphes complets à plus de deux sommets.

2.5.2 Une classe de graphes AP+2

Une classe de graphes très importante de la théorie des graphes est celle des *roues* car elle joue un rôle central pour la notion de 3-connexité. En effet, d'après un théorème de Tutte, elles permettent, grâce à diverses modifications, d'obtenir l'intégralité des graphes 3-connexes :

Théorème ([21]) :

Un graphe est 3-connexe s'il est isomorphe à une roue ou s'il possède une arête dont la suppression ou la contraction préserve la 3-connexité du graphe résultant.

Ainsi, le cas des roues s'avère tout aussi intéressant pour la partition arbitraire avec deux préaffectations que l'était celui des cycles pour seulement une.

Nous commençons par présenter formellement la classe des roues :

Définition 9 :

Soit $n \geq 4$ un entier. La roue d'ordre n , notée W_n , est le graphe obtenu en reliant un sommet o à tous les sommets d'un cycle d'ordre $n - 1$.

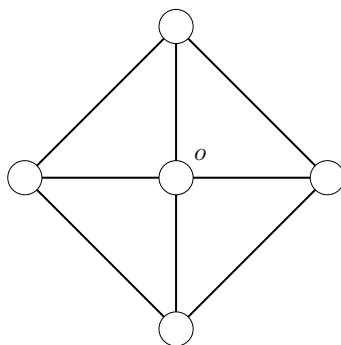


Figure 2.13 – La roue W_5

Un exemple de roue est visible sur la figure 2.13. Il est facile de voir que ces graphes sont traçables, et donc nécessairement AP (Théorème 4 page 15). De là, on peut naturellement se demander quel est le nombre minimum k de préaffectations de sommet que l'on peut faire dans ces graphes tout en préservant leur partition arbitraire ; étant de connectivité 3 dès que $n \geq 5$, il est légitime de penser que $k = 2$ d'après l'Observation 8 (page 44).

Pour pouvoir montrer que les roues sont effectivement des graphes AP+2, il est nécessaire de simplifier la vérification de cette propriété. Pour cela, il apparaît judicieux d'avoir de nouveau recours à la notion d'automorphisme de graphe, que nous avons utilisée dans le cadre des graphes AP+1 (Définition 3 page 23), puisque les roues sont des graphes possédant de nombreuses similarités dans leur topologie.

Cependant, la notion de sommets similaires, telle que nous l'avons définie, n'est pas totalement adaptée au cadre de la partition arbitraire avec deux préaffectations. En effet, il faut observer que si un graphe G possède deux sommets similaires u et v , alors il est nécessaire, pour s'assurer qu'il est AP+2, de vérifier que le couple (u, v) y est bien (q_1, q_2) -fixable. Autrement dit, il faut considérer les cas où les deux sommets préaffectés proviennent d'une même classe de sommets similaires de G .

Pour pouvoir exploiter au mieux le concept de similarité au sein d'un graphe potentiellement AP+2, il semble alors plus à propos d'introduire la notion de similarité entre couples de sommets :

Définition 10 :

Soient G un graphe, et (u_1, u_2) et (v_1, v_2) deux 2-uplets de ses sommets vérifiant $u_1 \neq u_2$, et $v_1 \neq v_2$. Nous notons \sim_A la relation binaire d'équivalence "être similaire par automorphisme" définie sur $V \times V$ de la manière suivante : $(u_1, u_2) \sim_A (v_1, v_2)$ s'il existe un automorphisme $\phi : V \rightarrow V$ tel que $\phi(v_1) = u_1$ et $\phi(v_2) = u_2$. La classe des similaires de (u_1, u_2) , notée $[(u_1, u_2)]_A$, est l'ensemble des couples de sommets équivalents à (u_1, u_2) dans G à automorphisme près, à savoir $\{(w_1, w_2) \in V \times V / (u_1, u_2) \sim_A (w_1, w_2)\}$.

Le fait suivant découle alors naturellement :

Observation 11 :

Soient G un graphe, et (u_1, u_2) et (v_1, v_2) deux 2-uplets de ses sommets tels que $(v_1, v_2) \in [(u_1, u_2)]_A$. Si (u_1, u_2) est (q_1, q_2) -fixable dans G en (S_{q_1}, S_{q_2}) pour un $q_1 \geq 1$ et un $q_2 \geq 1$ quelconques, alors (v_1, v_2) y est (q_1, q_2) -fixable dans les sous-ensembles (S'_{q_1}, S'_{q_2}) où $S'_{q_1} = \{\phi(w) / w \in S_{q_1}\}$, $S'_{q_2} = \{\phi(w) / w \in S_{q_2}\}$, et ϕ est un automorphisme de G tel que $\phi(v_1) = u_1$ et $\phi(v_2) = u_2$.

Ce principe est bien entendu adaptable à n'importe quel nombre de préaffectations de sommets. En nous appuyant sur celui-ci, nous allons désormais pouvoir montrer que toute roue est bien AP+2 ; les notations que nous allons utiliser pour les sommets sont celles de la figure 2.14.

Proposition 12 :

Soit $n \geq 5$ un entier. Le graphe W_n est AP+2.

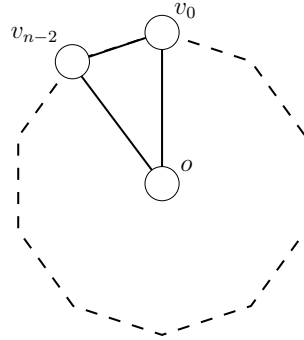


Figure 2.14 – La roue W_n

Preuve :

D'après la Définition 8 (page 43), pour montrer que $W = W_n$ est AP+2 il suffit de trouver, pour tout couple (u, v) de ses sommets et tout couple (q_1, q_2) d'entiers vérifiant $q_1 \geq 1$, $q_2 \geq 1$ et $q_1 + q_2 \leq n - 1$, deux sous-ensembles S_u et S_v de taille respective q_1 et q_2 tels que $u \in S_u$, $v \in S_v$, $W[S_u]$ et $W[S_v]$ soient connexes, et $W[V \setminus (S_u \cup S_v)]$ soit AP. Comme nous l'avons vu, il n'est pas nécessaire de montrer cela pour tout couple de $V \times V$ puisqu'il est possible de le faire uniquement pour ceux définissant les couples similaires de sommets de W (Observation 11).

En l'occurrence, il est possible d'identifier $1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ classes de couples similaires, à savoir $[(o, v_0)]_A = \bigcup_{i=0}^{n-2} (o, v_i)$ et $[(v_0, v_j)]_A = \bigcup_{i=0}^{n-2} (v_i, v_{(i+j) \bmod n-1})$ pour tout $j \in [1, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor]$. Montrons désormais que pour chacun de ces couples il est possible de trouver des sous-ensembles S_u et S_v de sommets de W tels qu'ils sont décrits plus haut, et ce quelque soit leur taille respective q_1 et q_2 .

- Pour (o, v_0) , il suffit de choisir $S_u = \{o, v_{q_2}, v_{q_2+1}, \dots, v_{q_2+q_1-2}\}$ et $S_v = \{v_0, v_1, \dots, v_{q_2-1}\}$. Le sous-graphe $W[V \setminus (S_u \cup S_v)]$ restant est alors isomorphe à une chaîne et est donc AP (voir figure 2.15.a).
- Si $(u, v) = (v_0, v_i)$, $i \in [1, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor]$, il y a trois cas à considérer :
 - Si $q_1 + q_2 \leq n - 1$ et $i + 1 \leq q_1 + q_2$, cela signifie que v_0 et v_i sont suffisamment proches sur la circonférence de la roue pour pouvoir "coller" les deux sous-ensembles S_u et S_v de sorte que $W[S_u \cup S_v]$ soit connexe et $W[V \setminus (S_u \cup S_v)]$ soit isomorphe à un cycle. (voir figure 2.15.b). Pour cela, on peut considérer $S_u = \{v_{-(q_1-i) \bmod (n-1)}, \dots, v_0, \dots, v_{i-1}\}$ et $S_v = \{v_i, \dots, v_{i+q_2-1}\}$ si $q_1 \geq i + 1$. Dans le cas contraire, $S_u = \{v_0, \dots, v_{q_1-1}\}$ et $S_v = \{v_{q_1}, \dots, v_i, \dots, v_{i+(q_2-(i-q_1+1))}\}$ font l'affaire.

- Si $q_1 + q_2 \leq n - 1$ et $i + 1 \geq q_1 + q_2 + 1$, les deux sommets v_0 et v_i sont trop éloignés sur la circonférence de la roue pour pouvoir choisir les sous-ensembles S_u et S_v comme dans le cas précédent. La solution consiste alors à y inclure des sommets de W situés sur des portions différentes du cycle de sorte que le reste du graphe soit traçable en passant par o (voir figure 2.15.c). Pour cela, on peut par exemple choisir les sous-ensembles $S_u = \{v_0, \dots, v_{q_1-1}\}$ et $S_v = \{v_i, \dots, v_{i+q_2-1}\}$.
- Si $q_1 + q_2 = n$, alors, comme $n \geq 5$, l'un des deux entiers q_1 et q_2 est strictement supérieur à 1; supposons que ce soit q_1 sans perte de généralité. Considérons alors S'_u et S'_v les sous-ensembles permettant de $(q_1 - 1, q_2)$ -fixer le couple (v_0, v_i) dans W grâce à l'une des deux stratégies précédentes; il est alors facilement observable que les sous-ensembles $(S'_u \cup \{o\}, S'_v)$ permettent de le (q_1, q_2) -fixer dans W .

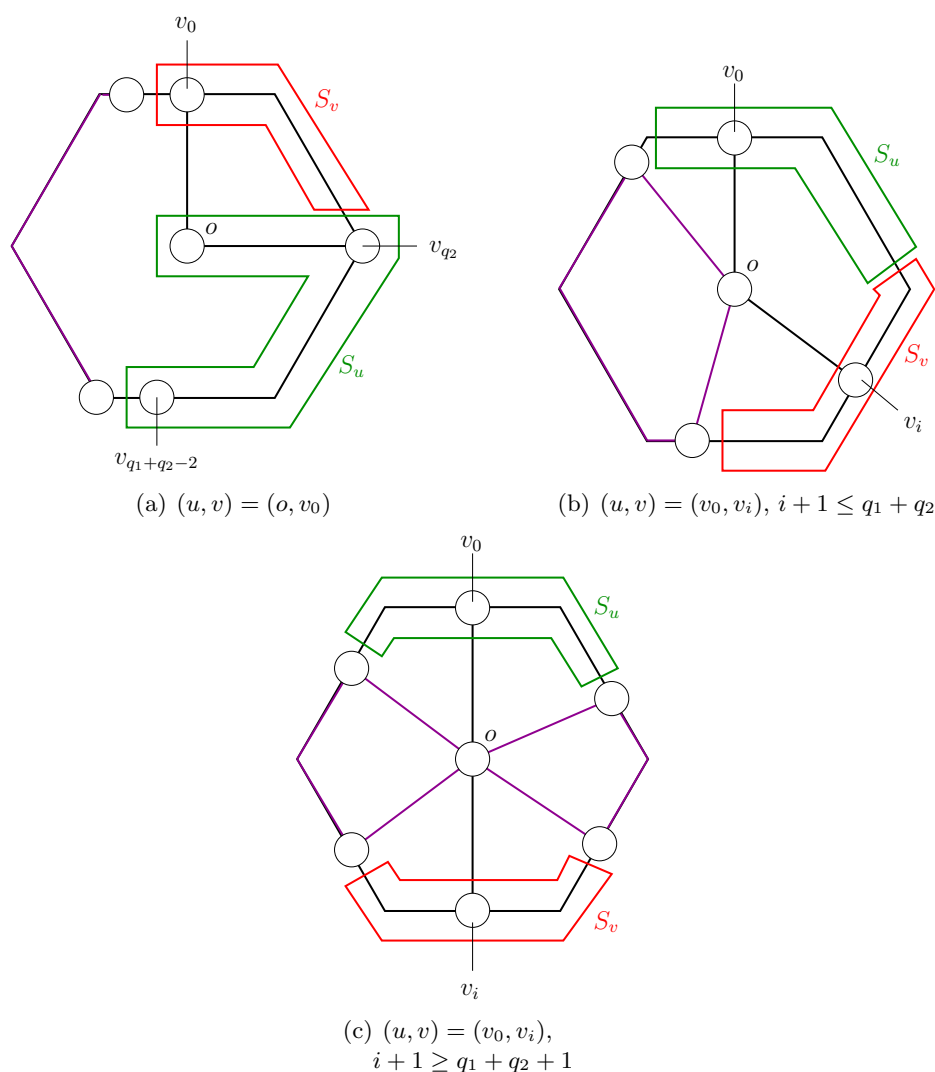


Figure 2.15 – Différentes situations pour prouver que les roues sont AP+2

□

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre principalement articulé autour de la notion de partition arbitraire avec une préaffectation, nous avons notamment exhibé des caractéristiques des graphes dotés de cette propriété et montré l'existence de certains d'entre eux. En particulier, nous avons vu que les graphes hamiltoniens sont trivialement $AP+1$ et avons présenté une famille infinie de graphes, celle des cylindres, qui possède cette propriété de manière moins évidente.

Nous avons ensuite étudié la place de cette nouvelle notion au sein de la hiérarchie des versions de la partition arbitraire déjà établie (Théorème 4 page 15). Malheureusement, nous n'avons pas pu l'y localiser très précisément à cause de notre difficulté à expliciter la relation entre les graphes $AP+1$ et les $OL-AP/R-AP$. Comme nous l'avons vu, celle-ci provient notamment de la condition nécessaire de connexité liée à celle de préaffectation de sommets qui nous oblige à étudier des graphes AP à la structure plus complexe que celle de ceux qui ont été étudiés jusqu'à maintenant. Cette condition implique en particulier que les arbres ne peuvent être $AP+1$ alors qu'ils constituent la famille de graphes que nous connaissons le mieux dans le cadre de la partition arbitraire.

Cela nous a finalement conduit à étudier la classe des ballons $AP+1$, mais celle-ci ne nous a pas permis d'obtenir d'éléments de réponse supplémentaires. En effet, notre difficulté à en exhiber un ainsi que les nombreuses conditions sur la longueur de leurs branches que nous avons mises en avant semblent infirmer le fait qu'il en existe réellement de tel, bien que nous n'ayons pu le prouver formellement. Pour s'en assurer, il semble nécessaire de se pencher davantage sur la partition arbitraire des ballons sectionnés qui jouent un rôle important dans la partition arbitraire avec une préaffectation des ballons.

Chapitre 3

Partition arbitraire et 2-connexité

Comme nous l'avons vu dans la section 1.2, la majorité des graphes qui ont été étudiés jusqu'à maintenant dans le cadre de la partition arbitraire sont les arbres. Ceux-ci, du fait de leur structure dénuée de cycles, ont permis d'opérer une première approche des graphes arbitrairement partitionnables et de trouver de premières caractéristiques partagées par ces derniers.

Une orientation légitime de l'étude de la partition arbitraire est donc de passer au cas de graphes à la structure plus complexe, comme ceux étant 2-connexes. Au-delà d'un intérêt scientifique évident, caractériser le maximum de graphes AP 2-connexes permettrait également d'avancer sur de nombreuses questions restées en suspens relatives à la notion de partition arbitraire. Nous ne savons toujours pas, par exemple, s'il existe des graphes AP minimaux 2-connexes. Nous avons également peu d'informations sur les graphes OL-AP et/ou R-AP 2-connexes, ce qui nous empêche de pouvoir proposer une réponse concrète à la Question 1 (page 32) que nous avons posée.

Ce chapitre a donc pour but d'étudier le comportement des graphes 2-connexes vis-à-vis de la partition arbitraire. Pour cela, nous commencerons par donner, dans la section 3.1, quelques caractéristiques générales partagées par tous les graphes AP 2-connexes. La suite de ce chapitre sera consacrée aux cas de quelques classes précises de ceux-ci : la section 3.2 proposera un résultat sur les 4-ballons dont nous avons eu besoin dans la section 2.4 (page 33), la section 3.3 s'attardera sur le cas des graphes admettant une décomposition en deux oreilles, tandis que la 3.4 se concentrera, elle, sur la partition arbitraire de ceux constructibles par le biais d'un produit cartésien entre deux graphes AP.

3.1 Résultats généraux sur les graphes AP 2-connexes

Dans l'introduction de ce mémoire, nous avons mentionné l'existence d'un théorème de Györi et Lovász concernant la partition de graphes k -connexes en k sous-graphes connexes de taille arbitraire :

Théorème 7 ([10, 15]) :

Soient G un graphe k -connexe d'ordre n , v_1, \dots, v_k un ensemble de k de ses sommets distincts, et $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ une séquence admissible pour n . Il existe une réalisation (V_1, \dots, V_k) de τ dans G telle que $\forall i \in [1, k], v_i \in V_i$.

Celui-ci est très important dans l'étude de la partition arbitraire des graphes k -connexes puisqu'il implique que toute séquence composée d'au plus k éléments est réalisable dans ceux-ci. Autrement dit, plus la connectivité d'un graphe est forte relativement à son ordre et plus le nombre de séquences à essayer de réaliser dans celui-ci pour prouver sa partition arbitraire est bas.

Conséquence 6 :

Soit G un graphe k -connexe d'ordre n , et τ une séquence admissible pour n . Si $|\tau| \leq k$, alors τ est réalisable dans G .

Cette conséquence découle directement de l'application du Théorème 7 sur G et τ en considérant k sommets arbitraires de G .

Nous avons vu qu'une condition nécessaire pour la partition arbitraire d'un graphe est l'existence d'un couplage parfait (ou quasi-parfait si son ordre est impair) dans celui-ci. Ainsi, toute condition nécessaire pour qu'un graphe 2-connexe en possède un en est également une pour qu'il soit AP. La condition suivante, par exemple, nous sera utile pour rejeter la partition arbitraire de certains graphes 2-connexes que nous étudierons plus bas.

Proposition 13 :

Soit G un graphe 2-connexe non traçable d'ordre pair. Si toutes les chaînes de sommets secondaires maximales de G sont de longueur impaire¹, alors G ne possède pas de couplage parfait.

Preuve :

Comme G n'est pas traçable, il possède nécessairement un cycle C contenant au moins deux sommets primaires. Dénotons par u_1, \dots, u_c ses sommets, où $c \geq 5$ puisque toutes les chaînes maximales de sommets secondaires de G sont de longueur impaire, et par $p_1 \leq \dots \leq p_x$ les indices des $x \geq 2$ sommets primaires de C . Comme $d(u_{p_1}) \geq 3$, il existe au moins un sommet v_1 voisin de u_{p_1} n'appartenant pas à C ; de par la structure de G , observons que v_1 est nécessairement un sommet secondaire.

G étant un graphe 2-connexe, d'après le théorème de Menger (Théorème 1 page 10) il existe obligatoirement, dans celui-ci, une chaîne reliant u_{p_1+1} à v_1 ne passant pas par u_{p_1} , à savoir $u_{p_1+1}, u_{p_1+2}, \dots, u_{p_q}, v_l, \dots, v_1$, où $u_{p_q} \neq u_{p_1}$ est un sommet primaire de C , et $P = v_1, \dots, v_l$ est une l -chaîne de G disjointe de C composée de sommets secondaires et/ou primaires de G (voir figure 3.1).

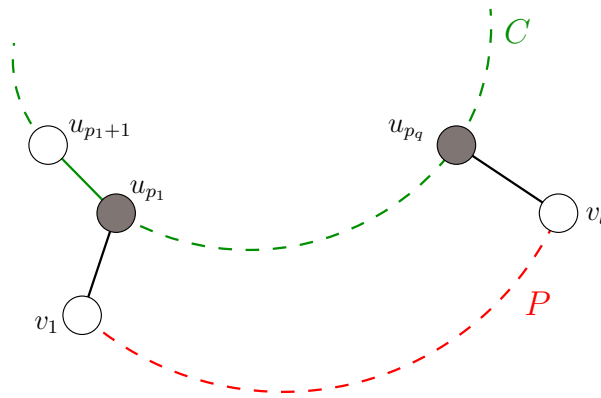


Figure 3.1 – Situation initiale pour la preuve de la Proposition 13

1. On considère que deux sommets primaires adjacents sont reliés par une chaîne de longueur paire 0.

Observons tout d'abord que, d'après nos hypothèses, C est nécessairement d'ordre pair. Remarquons alors que si M est un couplage de G tel que la moitié des arêtes composant C appartient à celui-ci, alors ce dernier ne peut pas être parfait. Supposons en effet que ce soit le cas : sous cette hypothèse, les sommets u_{p_1} et u_q sont donc déjà couverts par M ; v_1 étant un sommet secondaire de G , cela implique que, puisque M est parfait, $v_1v_2 \in M$. Comme toutes les chaînes maximales de sommets secondaires de G sont d'ordre impair, v_3 est également un sommet secondaire de G et on a alors nécessairement $v_3v_4 \in M$. Remarquons que tout sommet primaire de P est d'indice pair ; de proche en proche, il s'en suit que si v_t est le dernier d'entre eux, alors $\forall i \in [1, t-1]$ impair, $v_iv_{i+1} \in M$. En particulier, observons que $v_{t-1}v_t \in M$; la chaîne de P restante, à savoir v_{t+1}, \dots, v_l , est alors composée uniquement de sommets secondaires et est d'ordre impair ; l'un de ses sommets ne peut donc pas être couvert par M , qui ne peut alors pas être un couplage parfait de G sous la condition que nous avons exposée.

De cette constatation, il est facile de voir que G n'admet pas de couplage parfait M . Si ce dernier en était un, il n'y aurait alors que deux possibilités concernant la couverture du sommet u_{p_1+1} , à savoir $u_{p_1}u_{p_1+1} \in M$ ou $u_{p_1+1}u_{p_1+2} \in M$. Or, comme les chaînes maximales de sommets secondaires de C sont de longueur impaire, on en viendrait obligatoirement, dans les deux cas, à placer la moitié des arêtes de C dans M . De ce fait, un tel couplage M de G ne peut pas être parfait. \square

Gilbert a montré qu'étant donnés un ballon B et une séquence τ qui y est réalisable, il est toujours possible de trouver une réalisation particulière de τ dans ce graphe telle que ses deux plus grands sous-ensembles de sommets contiennent chacun l'une des racines de B [9]. Nous allons prouver que ce résultat n'est pas spécifiquement inhérent à la structure des ballons mais découle de leur connectivité :

Proposition 14 :

Soient G un graphe 2-connexe, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ une séquence réalisable dans G , et $R = (V_1, \dots, V_k)$ une réalisation de τ dans G . S'il existe un i tel que tous les sommets de V_i appartiennent à une chaîne P de sommets secondaires de G délimitée par deux sommets primaires v_1 et v_2 dont l'un, disons v_1 sans perte de généralité, appartient à un V_j , avec $\tau_i > \tau_j$, alors il existe une réalisation R' de τ dans G telle que v_1 appartient au sous-ensemble de taille τ_i .

Preuve :

Nous allons construire les sous-ensembles de sommets de la réalisation R' à partir de ceux de R au moyen d'une procédure d'échange de sommets. Pour cela, nous allons tout d'abord déplacer le sous-ensemble V_i sur P de sorte que l'un de ses sommets soit adjacent à l'un de ceux de V_j . Enfin, nous échangerons des sommets entre ces deux sous-ensembles de manière à ce que le sommet v_1 appartienne à celui de taille τ_i et ce sans que les deux sous-graphes qu'ils induisent ne perde leur connexité.

Informellement, si le sous-ensemble V_i ne possède pas de sommet adjacent à l'un de ceux de V_j , c'est qu'il existe, entre ces deux derniers, des sous-ensembles V_{q_1}, \dots, V_{q_l} de R induisant des sous-chaînes de P (voir figure 3.2.a). Comme $G[V_i \cup \bigcup_{x=1}^l V_{q_x}]$ induit une chaîne, il existe nécessairement une réalisation $R_t = (V_{t_1}, \dots, V_{t_k})$ de τ dans G telle que $V_{t_j} = V_j$ et V_{t_i} possède un sommet adjacent à l'un de ceux de V_{t_j} (voir figure 3.2.b). Observons que l'on peut avoir $R_t = R$ si les sous-ensembles V_i et V_j satisfaisaient déjà la contrainte d'adjacence.

Notons séquentiellement u_1, \dots, u_{τ_i} les sommets de V_{t_i} , où u_1 est l'extrémité de la chaîne $G[V_{t_i}]$ qui est adjacente à un sommet de V_{t_j} . Comme $\tau_i > \tau_j$, il est facile de voir que les sous-ensembles $V'_j = \{u_{\tau_i - \tau_j + 1}, \dots, u_{\tau_i}\}$ et $V'_i = (V_{t_j} \cup V_{t_i}) \setminus V'_j$ induisent des sous-graphes de G connexes et de taille respective τ_j et τ_i .

Finalement, il est facile de voir que $R' = R_t \setminus (V_{t_i}, V_{t_j}) \cup (V'_i, V'_j)$ est une réalisation respectant les contraintes de taille et de connexité désirées, et telle que, comme $v_1 \in V_{t_j}$, $v_1 \in V'_i$ comme souhaité (voir figure 3.2.c).

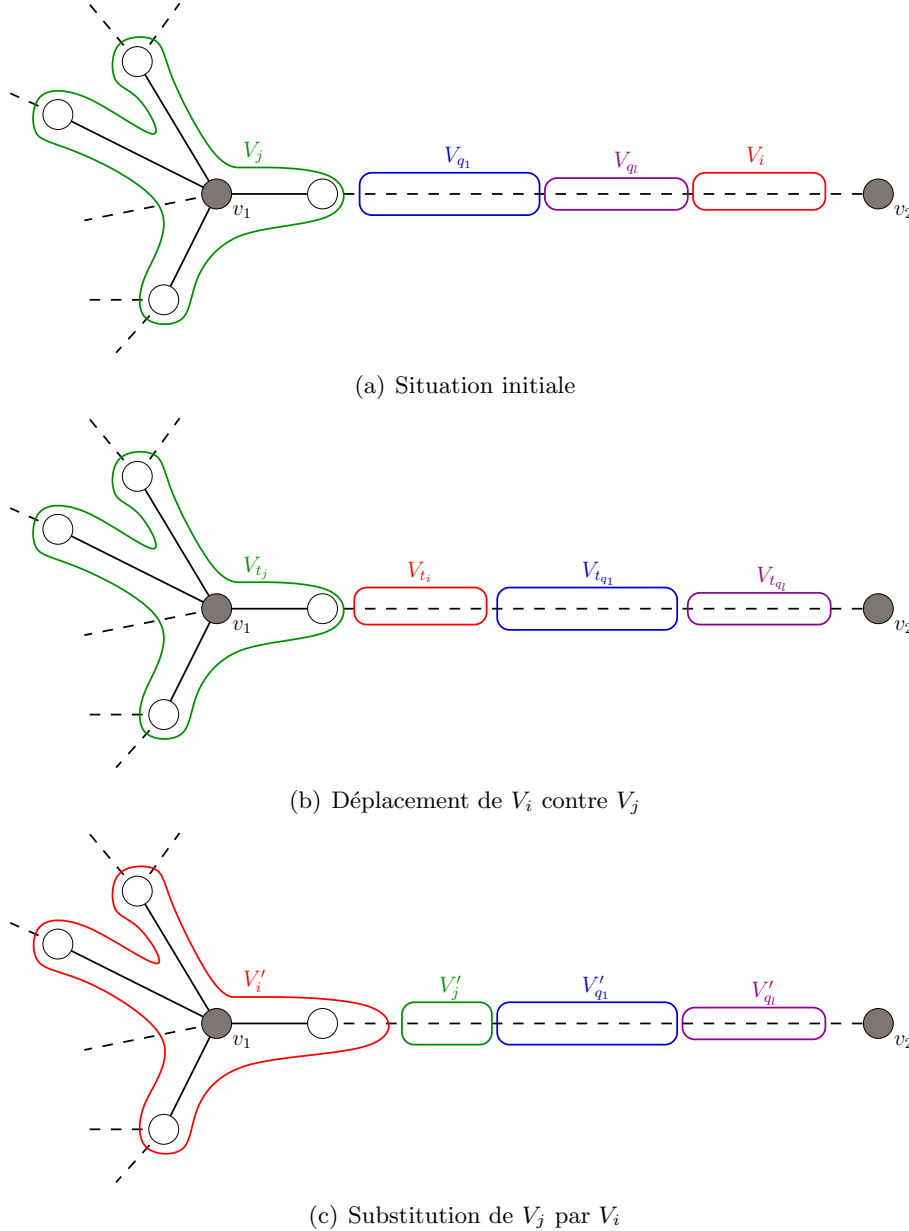


Figure 3.2 – Situations successives pour la preuve de la Proposition 14

□

Une conséquence directe de cette proposition est la suivante :

Conséquence 7 :

Soient G un graphe 2-connexe, et $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ une séquence admissible pour n . Si τ est réalisable dans G , alors il existe une réalisation (V_1, \dots, V_k) de celle-ci dans G telle que les deux plus grands sous-ensembles de sommets V_k et V_{k-1} contiennent chacun un sommet primaire de G .

Bien entendu, il est possible de trouver des exemples de graphes AP 2-connexes dans lesquels des séquences vont pouvoir être réalisées de manière à ce que strictement plus de deux des plus grands sous-ensembles contiennent chacun l'un de leurs sommets primaires. Mais ce n'est pas toujours garanti car la procédure que nous venons de présenter dépend d'une réalisation initiale. On peut alors très bien imaginer le cas pathologique d'un graphe G dans lequel la réalisation initiale (V_1, \dots, V_k) de la séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ dans celui-ci serait de la forme suivante :

- un sommet primaire v_1 de G appartient à V_k ,
- un sommet primaire v_2 de G appartient à V_{k-1} ,
- v_1 et v_2 sont reliés dans G par une chaîne de sommets secondaires P ,
- tous les sommets de V_{k-2} appartiennent à P .

Dans ce cas, la Proposition 14 (page 51) ne permet pas de trouver de réalisation de τ dans G telle que son sous-ensemble de sommets de taille τ_{k-2} contienne un sommet primaire de G distinct de v_1 et v_2 ; pourtant, rien ne garantit qu'il n'en existe pas si l'on choisissait τ_{k-2} sommets de G extérieurs à P .

Maintenant que nous avons donné quelques propriétés de la partition arbitraire des graphes biconnexes valables pour l'intégralité d'entre eux, nous allons, dans les sections suivantes, nous concentrer sur des classes plus précises de ceux-ci.

3.2 Sur l'existence de 4-ballons AP non R-AP

Lors des études précédentes sur les ballons AP, la question de la partition arbitraire récursive de ceux-ci s'est naturellement posée. L'intérêt premier était alors de trouver un majorant au nombre de branches des ballons R-AP; dans cette optique, il a été prouvé que ceux-ci en possèdent au plus cinq [4].

Durant notre étude des ballons AP+1 (section 2.4 page 33), nous avons émis la nécessité de savoir si tous les 4-ballons AP sont R-AP ou non. Il apparaît encore plus naturel de se poser cette question lorsque l'on sait que cette propriété est vraie pour tous les 3-ballons, même si cette dernière découle directement de leur traçabilité.

L'échantillon de 4-ballons AP exhibé par Gilbert [9] semble indiquer que tous les 4-ballons AP sont également R-AP. Cependant, ce dernier n'est pas suffisamment représentatif de l'ensemble des 4-ballons puisque composé principalement de ballons possédant au moins une branche de petite longueur. En effet, dans ceux-ci, le fait qu'on puisse facilement combler l'intégralité d'une branche par un sous-ensemble de sommets y facilite la réalisation récursive d'une séquence.

Ainsi, il faut chercher du côté des 4-ballons ayant une plus petite branche suffisamment fournie (composée d'au moins quatre sommets) pour pouvoir apporter une réponse à notre question :

Proposition 15 :

Le 4-ballon $B(4, 5, 5, 7)$ est AP mais n'est pas R-AP.

Preuve :

Pour montrer que $B = B(4, 5, 5, 7)$ est AP, il faut montrer qu'il est possible d'y réaliser toute séquence admissible pour son ordre, à savoir 23. Le nombre de partitions de 23 étant grand (supérieur à 1000), nous ne pouvons pas nous permettre de donner ici une preuve de sa partition arbitraire; en revanche, cela peut être facilement vérifié par le biais d'un programme informatique. L'algorithme que nous avons utilisé pour cette vérification est fourni à la fin de ce mémoire (annexe A).

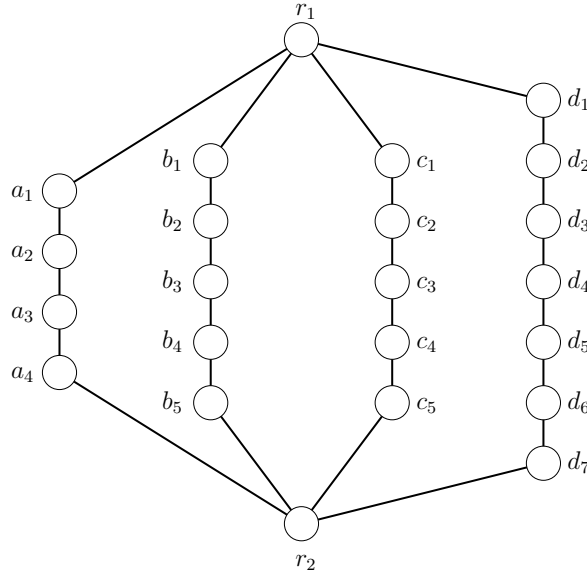


Figure 3.3 – Le 4-ballon $B(4, 5, 5, 7)$

Prouvons maintenant que B n'est pas R-AP. Si c'était le cas, il serait alors possible, d'après la Remarque 2 (page 16), de trouver un sous-ensemble S_q contenant q sommets de B tel que $B[S_q]$ et $B[V \setminus S_q]$ soient R-AP, et ce pour tout $q \in [1, 11]$

En particulier, si B était R-AP, il serait donc possible de trouver un sous-ensemble S_9 de neuf de ses sommets satisfaisant les contraintes exposées ci-dessus. Observons que S_9 ne peut pas couvrir entièrement deux branches de B ainsi que l'une de ses racines ; il ne peut donc qu'induire un sous-arbre de B .

Les arbres R-AP ayant été complètement caractérisés, d'après le Théorème 5 (page 16) le sous-graphe de B induit par S_9 ne peut qu'être isomorphe à P_9 , $Cat(2, 7)$ ou $Cat(4, 5)$ puisque ce sont les seuls arbres R-AP d'ordre 9. Or, il n'est pas possible de trouver un sous-ensemble de neuf sommets de B induisant un arbre isomorphe à l'un de ces trois derniers tout en impliquant que $B[V \setminus S_9]$ soit R-AP : les tables 3.1 à 3.3 énumèrent tous les choix possibles pour S_9 ² (les notations utilisées sont celles de la figure 3.3). On prendra notamment en compte que pour $Cat(2, 7)$ la seule possibilité pour le bras de taille 6 est de prendre des sommets de la quatrième branche de B afin de ne pas déconnecter le reste du graphe.

Comme il n'est pas possible de trouver un sous-ensemble de neuf sommets de B satisfaisant les contraintes de la Remarque 2 (page 16), $B(4, 5, 5, 7)$ n'est pas R-AP.

□

Finalement, l'exemple de ce ballon nous permet de répondre à notre interrogation :

Conséquence 8 :

Il existe des 4-ballons AP n'étant pas R-AP.

2. Les choix de sommets similaires ne sont pas représentés car implicitement traités.

Table 3.1 – Sous-ensembles S_9 de neuf sommets de $B = B(4, 5, 5, 7)$ induisant P_9

| S_9 | $B[V \setminus S_9]$ |
|---|----------------------|
| $\{a_4, a_3, a_2, a_1, r_1, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ | $Cat(6, 8)$ |
| $\{a_3, a_2, a_1, r_1, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ | $Cat(6, 8)$ |
| $\{a_4, a_3, a_2, a_1, r_1, d_1, d_2, d_3, d_4\}$ | $P(3, 5, 5)$ |
| $\{a_3, a_2, a_1, r_1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ | $P(1, 2, 5, 5)$ |
| $\{a_2, a_1, r_1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$ | $P(1, 2, 5, 5)$ |
| $\{b_5, b_4, b_3, b_2, b_1, r_1, c_1, c_2, c_3\}$ | $P(2, 4, 7)$ |
| $\{b_4, b_3, b_2, b_1, r_1, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ | $P(1, 1, 4, 7)$ |
| $\{b_5, b_4, b_3, b_2, b_1, r_1, d_1, d_2, d_3\}$ | $P(4, 4, 5)$ |
| $\{b_4, b_3, b_2, b_1, r_1, d_1, d_2, d_3, d_4\}$ | $P(1, 3, 4, 5)$ |
| $\{b_3, b_2, b_1, r_1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ | $P(2, 2, 4, 5)$ |
| $\{b_2, b_1, r_1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$ | $P(1, 3, 4, 5)$ |
| $\{b_1, r_1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$ | $P(4, 4, 5)$ |

Table 3.2 – Sous-ensembles S_9 de neuf sommets de $B = B(4, 5, 5, 7)$ induisant $Cat(2, 7)$

| S_9 | $B[V \setminus S_9]$ |
|---|----------------------|
| $\{a_1, r_1, b_1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$ | $P(1, 3, 4, 5)$ |
| $\{b_1, r_1, c_1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$ | $P(1, 4, 4, 4)$ |

Table 3.3 – Sous-ensembles S_9 de neuf sommets de $B = B(4, 5, 5, 7)$ induisant $Cat(4, 5)$

| S_9 | $B[V \setminus S_9]$ |
|---|----------------------|
| $\{a_1, r_1, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ | $P(1, 2, 3, 7)$ |
| $\{a_1, r_1, b_1, b_2, b_3, d_1, d_2, d_3, d_4\}$ | $P(2, 3, 3, 5)$ |
| $\{a_1, r_1, d_1, d_2, d_3, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ | $P(1, 3, 4, 5)$ |
| $\{b_1, r_1, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ | $P(1, 1, 4, 7)$ |
| $\{b_1, r_1, a_1, a_2, a_3, d_1, d_2, d_3, d_4\}$ | $P(1, 3, 4, 5)$ |
| $\{b_1, r_1, c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ | $P(2, 4, 7)$ |
| $\{b_1, r_1, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, d_4\}$ | $P(2, 3, 4, 4)$ |
| $\{b_1, r_1, d_1, d_2, d_3, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ | $P(4, 4, 5)$ |
| $\{b_1, r_1, d_1, d_2, d_3, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ | $P(1, 4, 4, 4)$ |
| $\{d_1, r_1, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ | $P(1, 1, 5, 6)$ |
| $\{d_1, r_1, b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ | $P(2, 5, 6)$ |
| $\{d_1, r_1, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ | $P(1, 2, 4, 6)$ |

3.3 Graphes admettant une décomposition en deux oreilles

L'intérêt pour nous d'étudier, dans ce chapitre, le cas des graphes admettant une décomposition en deux oreilles est justifié par le résultat suivant :

Proposition 16 ([7], Proposition 3.1.1) :

Soit G un graphe. G est 2-connexe ssi il est un cycle ou admet une décomposition en oreilles.

Le fait que tout graphe 2-connexe puisse être obtenu grâce à cette construction fait de cette dernière un point de départ idéal pour étudier la relation entre les notions de partition arbitraire et de biconnexité.

Le nombre d'oreilles composant un graphe 2-connexe pouvant être arbitrairement grand, nous nous limitons, dans le cadre d'une première approche, aux graphes en admettant peu dans leur décomposition en oreilles. Les graphes constructibles à partir d'une unique greffe d'oreille dans un cycle étant isomorphes aux 3-ballons, ils sont traçables et donc AP ; c'est pourquoi nous allons nous intéresser aux graphes admettant deux oreilles dans leur décomposition en oreilles. Nous allons également nous restreindre aux graphes dans lesquels les extrémités de ces deux oreilles appartiennent au cycle de base. Comme l'illustre la figure 3.4 il y a alors trois configurations à considérer selon que les deux oreilles possèdent une, deux ou aucune extrémités en commun sur celui-ci :

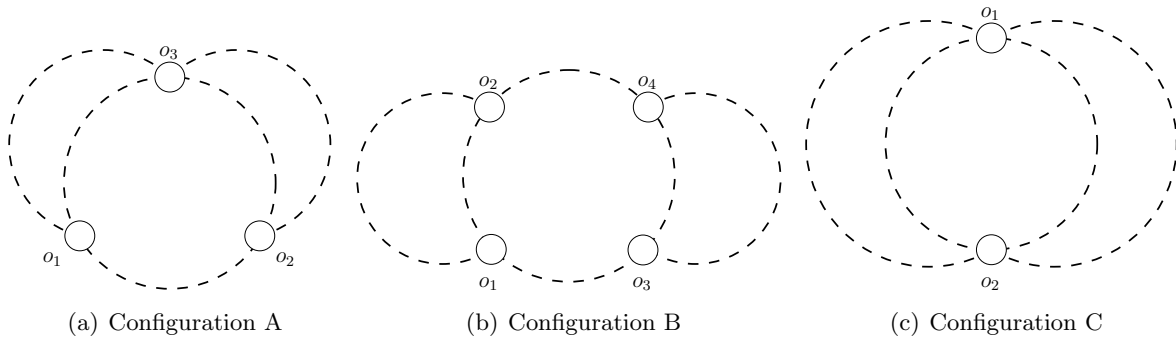


Figure 3.4 – Configurations considérées de greffe de deux oreilles dans un cycle

Observons que les graphes dans lesquels les deux oreilles sont greffées au niveau de deux mêmes sommets du cycle (configuration C) sont isomorphes aux 4-ballons. La partition arbitraire des ballons ayant déjà été étudiée [4, 9], nous allons nous concentrer sur les graphes admettant une décomposition en deux oreilles ayant exactement une extrémité en commun sur le cycle initial (configuration A) ou aucune (configuration B).

3.3.1 Cas où les deux oreilles ont une seule extrémité commune

Du point de vue de la terminologie, étant donné un graphe admettant une décomposition en deux oreilles ayant une seule extrémité commune, nous distinguons par o le sommet commun à ses deux oreilles, et par o_1 et o_2 leur autre extrémité respective. Nous dénotons par i_1 et e_1 (resp. i_2 et e_2) la longueur des deux chaînes de sommets secondaires reliant ses sommets o et o_1 (resp. o et o_2). Enfin, c est le nombre de sommets composant la chaîne de sommets secondaires reliant o_1 à o_2 (voir figure 3.5). Pour des valeurs i_1, i_2, e_1, e_2 , et c données, nous notons $M(i_1, i_2, e_1, e_2, c)$ le graphe admettant une décomposition en deux oreilles correspondant.

Dans la suite de cette partie, nous allons considérer que les valeurs i_1, i_2, e_1, e_2 , et c sont toutes non nulles. En effet, il est facilement observable que si au moins l'une d'entre elles l'est, alors le graphe résultant est trivialement AP :

Observation 12 :

Soit $M = M(i_1, i_2, e_1, e_2, c)$ un graphe admettant une décomposition en deux oreilles ayant une seule extrémité commune. Si une valeur de l'ensemble $\{i_1, i_2, e_1, e_2, c\}$ est nulle, alors M est traçable.

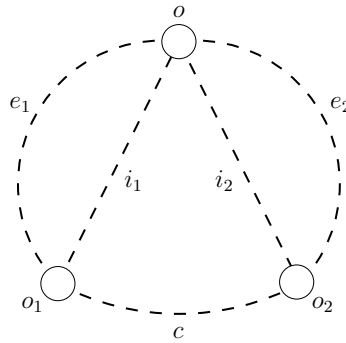


Figure 3.5 – Le graphe $M(i_1, i_2, e_1, e_1, c)$

De plus, nous allons également considérer qu’au moins l’un de ces cinq paramètres est pair :

Proposition 17 :

Soit $M = M(i_1, i_2, e_1, e_1, c)$ un graphe admettant une décomposition en deux oreilles ayant une seule extrémité commune. Si toutes les valeurs de l’ensemble $\{i_1, i_2, e_1, e_2, c\}$ sont impaires, alors M n’est pas AP.

Preuve :

Le nombre de sommets de M est $n = 3 + i_1 + i_2 + e_1 + e_2 + c$. Il est facile de voir que si les cinq paramètres définissant M sont impaires, alors n est pair et M satisfait toutes les contraintes de la Proposition 13 (page 50) qui garantit que ce dernier ne possède pas de couplage parfait et donc qu’il n’est pas AP. \square

Nous allons finalement donner une preuve de l’existence d’une infinité de graphes admettant une décomposition en deux oreilles ayant une seule extrémité commune non trivialement AP. Celle-ci va, par la même occasion, nous permettre d’illustrer une autre utilisation de la notion de distance à traçabilité que nous avons définie dans la section 2.2.2 (page 21).

Proposition 18 :

Soit $M = M(1, 1, 2, 1, c)$ un graphe admettant une décomposition en deux oreilles ayant une seule extrémité commune. M est AP quelque soit $c \geq 1$.

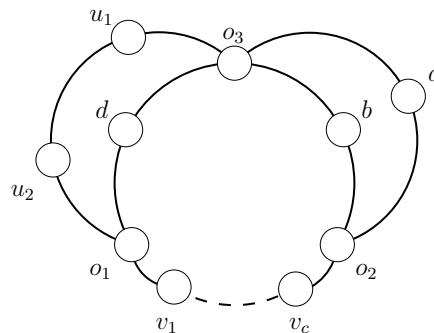


Figure 3.6 – Le graphe $M(1, 1, 2, 1, c)$

Preuve :

Les notations que nous allons utiliser sont celles de la figure 3.6. Nous allons montrer quelque chose de plus fort, à savoir que M est OL-AP quelque soit $c \geq 1$, ce qui impliquera sa partition arbitraire d’après le Théorème 4 (page 15). Pour cela, il suffit, d’après la Remarque 1 (page 16),

de trouver un sous-ensemble S_q de q sommets de M tel que $M[S_q]$ soit connexe et $M[V \setminus S_q]$ soit OL-AP, et ce pour tout $q \in [1, c + 7]$.

Observons que le sommet o_3 de M a une distance à traçabilité de 3, atteinte pour le sous-ensemble $S = \{d, o_3, b\}$. Les graphes traçables étant OL-AP d'après le Théorème 4 (page 15), on peut alors se limiter à chercher les sous-ensembles S_q désirés pour $q \leq 2$ puisqu'au-delà on peut facilement trouver n'importe lequel d'entre eux en partant de S puis en ajoutant à celui-ci autant de sommets que souhaité de la chaîne $M[V \setminus S]$ à partir de l'une de ses extrémités.

Les sous-ensembles S_1 et S_2 sont facilement trouvables; par exemple, $S_1 = \{a\}$ et $S_2 = \{u_1, u_2\}$ font l'affaire puisque les sous-graphes induits $M[V \setminus S_1]$ et $M[V \setminus S_2]$ sont tous les deux traçables et donc OL-AP. Cela suffit à prouver que M est OL-AP, et donc AP, quelque soit la valeur de c . \square

3.3.2 Cas où les deux oreilles n'ont aucune extrémité commune

Considérons un graphe admettant une décomposition en deux oreilles sans extrémité commune. Dénotons par o_1 et o_2 les extrémités de l'une de ses deux oreilles sur le cycle de base, et par o_3 et o_4 celles de sa seconde oreille; ce graphe peut alors être décrit au moyen de six paramètres $i_1, i_2, e_1, e_2, c_1,$ et c_2 :

- i_1 et e_1 sont les tailles des deux chaînes de sommets secondaires reliant o_1 et o_2 ,
- i_2 et e_2 sont les tailles des deux chaînes de sommets secondaires reliant o_3 et o_4 ,
- c_1 est l'ordre de la chaîne de sommets secondaires reliant o_1 à o_3 ,
- c_2 est l'ordre de la chaîne de sommets secondaires reliant o_2 à o_4 .

Pour des valeurs données de $i_1, i_2, e_1, e_2, c_1,$ et c_2 , dénotons par $D(i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2)$ le graphe admettant une décomposition en deux oreilles sans extrémité commune correspondant (voir figure 3.7).

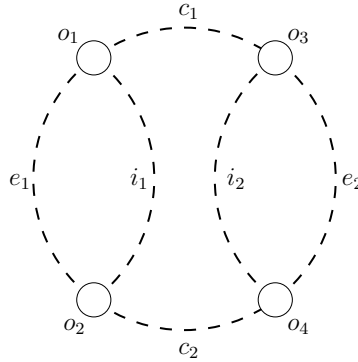


Figure 3.7 – Le graphe $D(i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2)$

Comme pour le cas des graphes admettant une décomposition en deux oreilles ayant une seule extrémité commune, il est facile de voir que si l'une des valeurs de l'ensemble $\{i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2\}$ est nulle, alors le graphe $D(i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2)$ est trivialement AP. En effet :

Observation 13 :

Soit $D = D(i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2)$ un graphe admettant une décomposition en deux oreilles sans extrémité commune. Si une valeur de l'ensemble $\{i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2\}$ est nulle, alors D est traçable.

De nouveau, il est également possible, étant donné un graphe D de profil $D(i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2)$, d'éliminer, si l'on souhaite que D soit AP, certaines combinaisons de valeurs pour i_1, i_2, e_1, e_2, c_1 , et c_2 relativement à la parité de ces six paramètres :

Proposition 19 :

Soit $D = D(i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2)$ un graphe admettant une décomposition en deux oreilles sans extrémité commune. Si toutes les valeurs de l'ensemble $\{i_1, i_2, e_1, e_2, c_1, c_2\}$ sont impaires, alors D n'est pas AP.

Preuve :

Observons que l'ordre de D est de $n = 4 + i_1 + i_2 + e_1 + e_2 + c_1 + c_2$, qui est pair lorsque ces six paramètres sont impairs. Dans ce cas, D satisfait toutes les contraintes permettant d'appliquer la Proposition 13 (page 50), nous permettant de conclure qu'il n'admet pas de couplage parfait et donc qu'il n'est pas AP lorsque ces six paramètres sont impairs. \square

Pour en terminer avec cette brève étude des graphes 2-connexes admettant une décomposition en deux oreilles sans extrémité commune, nous allons montrer qu'il existe une infinité de tels graphes AP.

Proposition 20 :

Soit $D = D(1, 1, 2, 1, 1, c)$ un graphe admettant une décomposition en deux oreilles sans extrémité commune. D est AP quelque soit $c \geq 1$

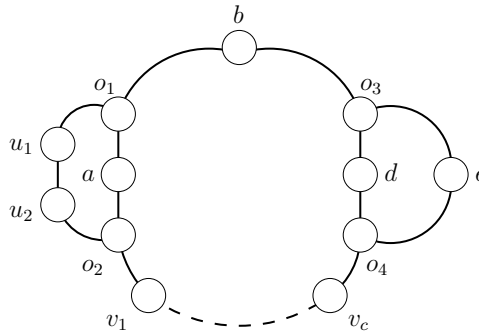


Figure 3.8 – Le graphe $D(1, 1, 2, 1, 1, c)$

Preuve :

Pour un entier $c \geq 1$ quelconque, nous pouvons prouver que D est toujours AP en montrant qu'il est OL-AP (l'argument est identique à celui utilisé pour démontrer la Proposition 18 page 57). Comme le sommet o_3 de D , selon les notations de la figure 3.8, vérifie $d_T(o_3) = 3$, distance atteinte pour $S = \{b, o_3, e\}$, nous pouvons prouver cela en trouvant deux sous-ensembles S_1 et S_2 de sommets de D de taille respective 1 et 2 tels que $D[S_1]$ et $D[S_2]$ soient connexes, et $D[V \setminus S_1]$ et $D[V \setminus S_2]$ soient OL-AP.

Il est alors facile de voir que les sous-ensembles $S_1 = \{a\}$ et $S_2 = \{u_1, u_2\}$ font l'affaire puisque les deux sous-graphes $D[V \setminus S_1]$ et $D[V \setminus S_2]$ sont traçables et donc OL-AP (Théorème 4 page 15). Cela suffit à prouver que D est OL-AP et donc AP quelque soit la valeur de c . \square

3.4 Graphes constructibles par produit cartésien $G_{\square}P_l$

Une conjecture toujours ouverte concernant le produit cartésien de graphes est relative à l'hamiltonicité : *si deux graphes G et H sont hamiltoniens, $G_{\square}H$ l'est-il obligatoirement ?* Au même titre que pour une grande partie des problèmes ciblant cette notion, il est difficile de pouvoir se prononcer à l'heure actuelle [13] ; il paraît alors judicieux, pour avancer sur la question, de s'intéresser à une version plus faible de cette conjecture :

Question 2 :

Soient G et H deux graphes. Si G et H sont AP, $G_{\square}H$ l'est-il obligatoirement ?

Cette interrogation, loin d'être triviale comme nous allons le voir, a également un lien avec l'étude des graphes AP 2-connexes que nous avons débutée. En effet, d'après un résultat de Sabidussi [20], si G et H sont respectivement m_1 -connexe et m_2 -connexe, alors $G_{\square}H$ est $(m_1 + m_2)$ -connexe ; de ce fait, comme les graphes AP sont nécessairement connexes, tout graphe résultant d'un produit cartésien de deux d'entre eux est nécessairement 2-connexe³.

Pour pouvoir apporter une réponse à la Question 2, il semble nécessaire de commencer par nous restreindre à une version plus simple de celle-ci ; dans un premier temps, nous proposons donc d'étudier la partition arbitraire du produit cartésien de deux graphes AP dans le cas où l'un d'entre eux est une chaîne d'ordre $l \geq 2$ quelconque. Précisons que cette version simplifiée de la Question 2 a été récemment considérée par quelques chercheurs pour de petites valeurs de l , mais que ceux-ci n'ont pas encore pu nous transmettre les avancées de leurs travaux⁴.

Le produit cartésien d'un graphe par une chaîne a la particularité d'être simple à appréhender. La structure du graphe $G_{\square}P_l$ peut en effet être vue comme l'union disjointe de l copies G^1, \dots, G^l de G reliées successivement les unes aux autres par des couplages. En guise d'illustration, on pourra considérer le produit cartésien de $Cat(2, 3)$ par P_3 représenté sur la figure 1.2 (page 10).

Nous nous servons de cette intuition afin d'introduire ci-dessous quelques notations qui nous seront utiles dans la suite de cette section :

Remarque 3 :

Soient G un graphe, et $l \geq 2$ un entier ; considérons P_l la chaîne d'ordre l dont les sommets sont dénotés par v_1, \dots, v_l . La $i^{\text{ème}}$ copie de G dans $G_{\square}P_l$, notée G^i , est le sous-graphe $(G_{\square}P_l)[V_i]$, où $V_i = \{(u, v_i) \in V(G_{\square}P_l) / u \in V(G)\}$. Si $u \in V(G)$ est un sommet de G , la $i^{\text{ème}}$ copie de u dans $G_{\square}P_l$, notée u^i , est le sommet $(u, v_i) \in V(G_{\square}P_l)$, c'est-à-dire le sommet équivalent à u dans G^i . Si $S \subseteq V(G)$ est un sous-ensemble de sommets de G , la $i^{\text{ème}}$ copie de S dans $G_{\square}P_l$, notée S^i , se définit comme le sous-ensemble de sommets de $G_{\square}P_l$ composé de la $i^{\text{ème}}$ copie de chaque sommet de S .

Ainsi, le graphe $G_{\square}P_l$ peut être vu comme l copies disjointes G^1, \dots, G^l de G reliées de la manière suivante : $\forall u \in V(G)$ et $\forall i \in [1, l - 1]$, $u^i u^{i+1} \in E(G_{\square}P_l)$.

Dans les sections suivantes, nous étudierons, étant donné un graphe AP G et un entier $l \geq 2$ quelconque, la partition arbitraire de $G_{\square}P_l$ en fonction de celle de G . En particulier, nous nous concentrerons sur plusieurs versions de la partition arbitraire en partant des plus contraignantes pour arriver à la plus classique. Pour chacune d'entre elles, nous présenterons des mécanismes de preuve propres à ses spécificités, c'est-à-dire sans tenir compte du fait que certains résultats obtenus pour des versions plus contraignantes pourraient être réutilisés grâce au Théorème 4 (page 15).

3. Hormis dans le cas où l'un des deux graphes est isomorphe à K_1 , mais dans ce cas le graphe résultant est trivialement AP puisque $G_{\square}K_1 \simeq G$.

4. Communication privée.

3.4.1 Cas où G est traçable

Étant donné un graphe G traçable et $l \geq 2$ un entier, il est très simple de montrer que le graphe $G \square P_l$ est toujours AP. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que la traçabilité est une propriété close par produit cartésien de graphes :

Proposition 21 :

Soient G et H deux graphes. Si G et H sont traçables, alors $G \square H$ est traçable.

Ce fait est facile à voir : G et H étant tous les deux couverts par une chaîne, à savoir $P_{n(G)}$ et $P_{n(H)}$, $G \square H$ est alors couvert par $P_{n(G)} \square P_{n(H)}$. Or, ce sous-graphe est isomorphe à une grille, un graphe toujours traçable, ce qui implique la traçabilité de $G \square H$.

Si cette proposition est triviale, elle permet néanmoins de prouver directement que le produit cartésien d'un graphe traçable par une chaîne est toujours arbitrairement partitionnable puisque tous les graphes traçables le sont d'après le Théorème 4 (page 15).

Conséquence 9 :

Soient G un graphe, et $l \geq 2$ un entier. Si G est traçable, alors $G \square P_l$ est AP.

3.4.2 Cas où G est AP+1 et non traçable

Nous allons désormais nous pencher sur la partition arbitraire du produit cartésien d'un graphe AP+1 G par une chaîne. Comme nous allons le voir, le fait que l'on puisse toujours trouver un sous-ensemble de sommets de G de taille arbitraire nous arrangeant, c'est-à-dire centré sur l'un de ses sommets quelconque, induisant un sous-graphe connexe de G , et tel que le reste du graphe soit AP est un réel atout pour réaliser une séquence dans $G \square P_l$.

Proposition 22 :

Soit G un graphe, et $l \geq 2$ un entier. Si G est AP+1, alors $G \square P_l$ est AP.

Preuve :

Pour prouver que $G \square P_l$ est AP lorsque G est un graphe AP+1 d'ordre n , il suffit de montrer que toute séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ admissible pour nl , son ordre, y est réalisable.

La stratégie que nous allons utiliser consiste à construire, à partir de τ , l séquences $\Lambda_1, \dots, \Lambda_l$ admissibles pour n qui seront chacune réalisées dans l'une des copies de G dans $G \square P_l$ de sorte que l'union de ces l réalisations en soit une de τ dans $G \square P_l$.

L'idée pour créer la séquence Λ_i est d'y placer le plus d'éléments de τ possible dont la somme ne dépasse pas n , puis d'y ajouter une partie γ_i^2 d'un autre élément quelconque de τ , disons τ_x , pour atteindre n . L'autre partie de τ_x , γ_j^1 , sera, elle, placée dans une autre séquence Λ_j . Lors de la réalisation de Λ_i et Λ_j dans $G \square P_l$, nous ferons alors en sorte que ces deux séquences soient réalisées dans des copies consécutives de G dans celui-ci et que les sous-ensembles de γ_i^2 et γ_j^1 sommets soient liés, c'est-à-dire qu'ils possèdent chacun une copie d'un même sommet de G pour que leur union induise un sous-graphe connexe d'ordre $\gamma_i^2 + \gamma_j^1 = \tau_x$.

Formellement, soit $p_1 \geq 1$ le plus petit entier tel que $\sum_{i=1}^{p_1} \tau_i \geq n$. La première séquence Λ_1 est constituée des $p_1 - 1$ plus petits éléments de τ ainsi que d'une partie de τ_{p_1} , à savoir $\gamma_1^2 = n - \sum_{i=1}^{p_1-1} \tau_i$. Ainsi, $\Lambda_1 = (\bigcup_{i=1}^{p_1-1} \tau_i) \cup \{\gamma_1^2\}$. Remarquons que γ_1^2 peut éventuellement être nul ou égal à τ_{p_1} , et que $\|\Lambda_1\| = n$ par construction.

Notons $\gamma_2^1 = \tau_{p_1} - \gamma_1^2$; la deuxième séquence, Λ_2 est alors construite de la manière suivante :

- Si $\gamma_2^1 \geq n$, c'est que la partie restante de l'élément τ_{p_1} est suffisamment grande pour couvrir à elle seule la deuxième copie de G dans $G_{\square}P_l$. Dans ce cas, nous posons $p_2 = p_1$, $\gamma_2^2 = n$, $\gamma_3^1 = \gamma_2^1 - n$, et $\Lambda_2 = \{n\}$.
- Dans le cas contraire, nous posons alors $p_2 \geq p_1 + 1$ comme étant le plus petit nombre d'éléments restant de τ , c'est-à-dire n'appartenant pas à Λ_1 , tel que $\gamma_2^1 + \sum_{i=p_1+1}^{p_2} \tau_i \geq n$. Comme précédemment, nous scindons ensuite l'élément τ_{p_2} en deux sous-éléments, à savoir $\gamma_2^2 = n - (\gamma_2^1 + \sum_{i=p_1+1}^{p_2-1} \tau_i)$ et $\gamma_3^1 = \tau_{p_2} - \gamma_2^2$. Finalement, $\Lambda_2 = \{\gamma_2^1\} \cup \bigcup_{i=p_1+1}^{p_2-1} \tau_i \cup \{\gamma_2^2\}$.

Dans les deux cas, observons que $\|\Lambda_2\| = n$ par construction et que τ_{p_2+1} est le plus petit élément de τ à ne pas avoir été placé dans Λ_1 ou Λ_2 .

Les l séquences Λ_i , pour $i \in [1, l]$, sont obtenues grâce à ce principe, que nous généralisons par le schéma d'induction suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Initialement, } p_0 = \gamma_1^1 = 0. \\ \text{Si } \gamma_i^1 \geq n, \text{ alors } p_i = p_{i-1}, \gamma_i^2 = n, \\ \gamma_{i+1}^1 = \gamma_i^1 - n, \text{ et } \Lambda_i = \{n\}. \\ \\ \text{Sinon, } p_i = \min\{j \in [p_{i-1} + 1, k] / \gamma_i^1 + \sum_{x=p_{i-1}+1}^j \tau_x \geq n\}, \\ \gamma_i^2 = n - (\gamma_i^1 + \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i-1} \tau_j), \gamma_{i+1}^1 = \tau_{p_i} - \gamma_i^2, \\ \text{et } \Lambda_i = \{\gamma_i^1\} \cup \bigcup_{j=p_{i-1}+1}^{p_i-1} \tau_j \cup \{\gamma_i^2\}. \end{array} \right.$$

La procédure que nous venons de décrire sépare les éléments de τ en l séquences admissibles pour n ; il ne reste plus qu'à réaliser chacune d'entre elles dans l'une des copies de G dans $G_{\square}P_l$ de manière à respecter les contraintes que nous avons présentées plus haut. Cela peut être effectué de la manière suivante :

- La séquence Λ_1 est réalisée dans la première copie de G dans $G_{\square}P_l$ en une réalisation $R_1 = (V_1^1, \dots, V_{|\Lambda_1|}^1)$. Si $\gamma_1^2 \geq 1$, notons $v_{i_1}^1$ l'un des sommets du sous-ensemble de taille γ_1^2 de R_1 .
- La séquence Λ_2 est réalisée dans la copie suivante de G dans $G_{\square}P_l$, à savoir G^2 . Si $\gamma_2^2 \geq 1$ et $\gamma_2^1 \geq 1$, c'est que l'élément τ_{p_1} a été divisé en au moins deux éléments ; dans ce cas, il est possible d'obtenir, puisque G^2 est AP+1, une réalisation $R_2 = (V_1^2, \dots, V_{|\Lambda_2|}^2)$ de Λ_2 dans G^2 telle que le sommet $v_{i_1}^2$ de ce graphe appartienne au sous-ensemble de taille γ_2^1 . Dans le cas où $\gamma_2^2 = 0$, considérons alors pour R_2 une réalisation quelconque de Λ_2 dans G^2 . Encore une fois, si $\gamma_2^2 \geq 1$, notons $v_{i_2}^2$ l'un des sommets du sous-ensemble de taille γ_2^2 de R_2 .
- De manière générale, la séquence Λ_q , quelque soit $q \in [2, l]$, est réalisée dans la $q^{\text{ème}}$ copie de G dans $G_{\square}P_l$. Si $\gamma_{q-1}^2 \geq 1$ et $\gamma_q^1 \geq 1$, le sommet $v_{i_{q-1}}^{q-1}$, appartenant au sous-ensemble de sommets de taille γ_{q-1}^2 de la réalisation R_{q-1} de Λ_{q-1} dans G^{q-1} , a été défini ; comme G^q est AP+1, il est alors possible de considérer une réalisation R_q de Λ_q dans celui-ci telle que le sommet $v_{i_{q-1}}^q$ soit préaffecté au sous-ensemble de taille γ_q^1 . Au contraire, si $\gamma_q^1 = 0$, prenons alors en tant que R_q une réalisation quelconque de Λ_q dans G^q . Si $\gamma_q^2 \geq 1$, dénotons par $v_{i_q}^q$ un sommet quelconque du sous-ensemble de taille γ_q^2 de $R_q = (V_1^q, \dots, V_{|\Lambda_q|}^q)$.

Finalement, pour obtenir une réalisation de τ dans $G_{\square}P_l$, il suffit de considérer la réalisation $\bigcup_{i=1}^l R_i$, puis de retirer de celle-ci tous les sous-ensembles résultant de la division d'un même élément de τ en plusieurs sous-éléments pour y ajouter leur union. Celle-ci est alors conforme aux nécessités exprimées plus haut, en particulier au fait que les unions de sous-ensembles que nous lui avons ajoutées induisent, par construction, des sous-graphes connexes de $G_{\square}P_l$ (voir figure 3.9).

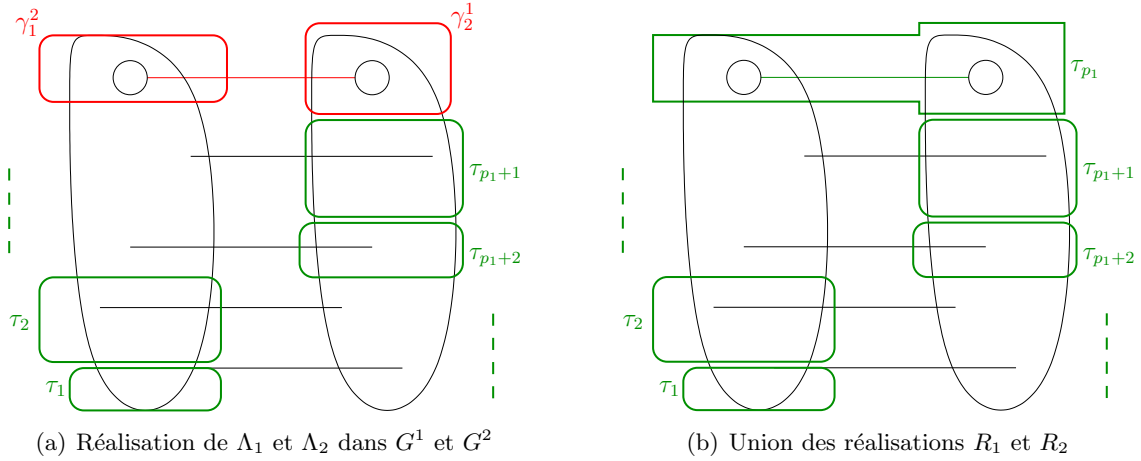


Figure 3.9 – Réalisation d'une séquence dans $G_{\square}P_l$ lorsque G est AP+1

□

3.4.3 Cas où G est R-AP, non traçable et non AP+1

Comme nous venons de le voir, la structure des graphes AP+1 est très efficace pour réaliser une séquence τ dans le produit d'un tel graphe G par une chaîne. Celle-ci nous assure en effet qu'il est possible de réaliser τ progressivement dans les différentes copies de G dans $G_{\square}P_l$, et ce sans nous soucier du moment où l'un des sous-ensembles à choisir va devoir contenir des sommets de deux d'entre elles.

À première vue, cette méthode semble également applicable lorsque le graphe G considéré est R-AP ; en effet, il est tout à fait possible de répéter la même stratégie pour trouver une réalisation R de τ dans $G_{\square}P_l$ sous cette hypothèse. Néanmoins, les choses se compliquent lorsque l'un des sous-ensembles de R , disons V' , doit contenir des sommets de deux copies successives de G dans $G_{\square}P_l$, à savoir $V' = V_1 \cup V_2$ où $V_1 \subset V(G^i)$ et $V_2 \subset V(G^{i+1})$. En effet, rien ne garantit qu'il va être possible de choisir V_1 et V_2 de manière à ce que notre processus puisse être poursuivi ; typiquement, rien n'assure que le choix de V_2 dans le graphe G^{i+1} ne va pas déconnecter ce dernier, tandis que nous sommes sûrs de toujours trouver des sous-ensembles nous arrangeant lorsque G est supposé AP+1. Du fait de cette complication, nous n'avons pas intérêt à utiliser cette stratégie dans le cadre des graphes R-AP.

En revanche, la propriété d'un graphe d'être R-AP se prête parfaitement à un raisonnement par induction : si l'on arrivait à prouver que $G_{\square}P_l$ est AP pour tout graphe G R-AP d'ordre au plus n , il serait alors possible, pour prouver que c'est également le cas pour un tel graphe R-AP H d'ordre $n + 1$, de se servir du fait que de nombreux sous-graphes de $H_{\square}P_l$ le seraient aussi. En effet, si $S \subset V(H)$ est un sous-ensemble de sommets de H induisant un sous-graphe R-AP de H d'ordre strictement inférieur au sien, il est alors facilement observable que $H[S]_{\square}P_l$ serait également AP par induction.

Grâce à ce principe, la récursivité de la partition arbitraire d'un graphe G apparaît être, pour réaliser une séquence dans $G_{\square}P_l$, un avantage tout aussi intéressant que le fait de pouvoir préaffecter des sommets dans celui-ci, bien que ces deux notions soient très différentes et ne permettent pas les mêmes possibilités dans ce contexte.

Pour pouvoir mettre cette méthode à l'œuvre, nous allons avoir besoin de définir deux nouvelles notions. La première concerne le fait qu'il soit possible ou non de diviser une séquence admissible pour nl en sous-séquences admissibles pour l :

Définition 11 :

Soient $p \geq 2$ un entier, et τ une séquence telle que $\|\tau\| \equiv 0 \pmod{p}$. τ est dite p -explosable s'il est possible de diviser τ en $l \geq 1$ sous-séquences $\Lambda_1, \dots, \Lambda_l$ non vides telles que $\bigcup_{i=1}^l \Lambda_i = \tau$ et, $\forall i \in [1, l]$, $\|\Lambda_i\| \equiv 0 \pmod{p}$. $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_l)$ forme alors une p -explosion de τ . Dans le cas particulier où $l = 1$, Λ est une p -explosion dite triviale de τ . On dit que τ est atomique pour p si celle-ci n'admet pas de p -explosion non triviale.

Par exemple, la séquence $\tau_1 = (4, 4, 5, 8)$ admet une 3-explosion non triviale, à savoir $((4, 5), (4, 8))$, au contraire de $\tau_2 = (4, 4, 4)$ qui est atomique pour 3.

Enfin, le concept suivant va nous permettre, étant donnée une réalisation "patron" d'une séquence dans un graphe G , d'étendre celle-ci au graphe $G_{\square}P_l$:

Définition 12 :

Soient G un graphe, $l \geq 2$ un entier, et $S = \{u_1, \dots, u_p\} \subseteq V(G)$ un sous-ensemble de sommets de G . L'extension de S dans $G_{\square}P_l$ est le sous-ensemble de sommets $\bigcup_{i=1}^l \bigcup_{j=1}^p u_j^i \subseteq V(G_{\square}P_l)$ composé des l copies dans $G_{\square}P_l$ de chaque sommet de S .

Dans la stratégie que nous avons détaillée pour réaliser une séquence τ dans $G_{\square}P_l$ lorsque G est R-AP, nous pouvons alors distinguer deux procédures distinctes qui seront appliquées en fonction de la nature de τ :

- Soit τ admet une l -explosion non triviale Λ ; il va alors être possible de décomposer $G_{\square}P_l$ en sous-graphes disjoints qui permettront chacun d'accueillir, par induction, une réalisation d'une des sous-séquences de τ appartenant à Λ .
- Soit τ est atomique pour l et, à ce moment-là, doit être réalisée dans $G_{\square}P_l$ sans avoir recours à l'hypothèse d'induction.

La clef de voute de notre stratégie repose donc sur la réalisation des séquences atomiques pour l dans le graphe produit. Malheureusement, nous ne sommes pas en mesure, à l'heure actuelle, de trouver une preuve permettant d'affirmer qu'il existe toujours une réalisation d'une telle séquence dans un tel graphe ; à cause de cela, nous ne pouvons pas appliquer notre stratégie pour prouver que la Question 2 (page 60) est vraie lorsque G est un graphe R-AP et H une chaîne.

Nous allons cependant formaliser notre idée en supposant que toute séquence atomique pour l soit bien réalisable dans $G_{\square}P_l$ lorsque G est R-AP.

Hypothèse 1 :

Soient G un graphe R-AP d'ordre n , $l \geq 2$ un entier, et τ une séquence admissible pour nl . Si τ est atomique pour l , alors τ est réalisable dans $G_{\square}P_l$.

Proposition 23 :

Soient G un graphe, et $l \geq 2$ un entier. Si G est R-AP et que l'Hypothèse 1 est vraie, alors $G \square P_l$ est AP.

Preuve :

Nous allons prouver cette proposition par induction sur n , l'ordre de G .

Le plus petit graphe R-AP non traçable ayant cinq sommets⁵, G est obligatoirement traçable lorsque $n \leq 4$. D'après la Conséquence 9 (page 61), $G \square P_l$ est donc arbitrairement partitionnable lorsque $n \leq 4$.

Supposons désormais que la propriété soit vraie pour tout graphe R-AP d'ordre au plus $n-1$, et prouvons qu'elle l'est également pour un tel graphe G d'ordre n . Pour cela, nous allons montrer que toute séquence τ admissible pour nl est réalisable dans $G \square P_l$.

Si τ est atomique pour l , alors, d'après l'Hypothèse 1, cette dernière est réalisable dans $G \square P_l$.

Dans le cas contraire, il est possible de s'inspirer de la partition arbitraire récursive de G afin de diviser le graphe $G \square P_l$ en sous-graphes disjoints qui permettront chacun la réalisation de l'une des sous-séquences appartenant à une l -explosion non triviale de τ . Pour ce faire, considérons $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$ une l -explosion non triviale de τ , et construisons la séquence $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ à partir de celle-ci de la manière suivante : $\forall i \in [1, k]$, $\rho_i = \frac{\|\Lambda_i\|}{l}$. Remarquons que, comme $\|\Lambda_i\| \equiv 0 \pmod{l}$ quelque soit $i \in [1, k]$ et que $\sum_{i=1}^k \|\Lambda_i\| = nl$, les éléments de ρ sont bien des nombres entiers et, nécessairement, $\|\rho\| = n$; ρ est donc réalisable dans G puisque ce dernier est R-AP (voir figure 3.10.a).

Considérons alors $R = (V_1, \dots, V_k)$ une réalisation récursive de ρ dans G , ainsi que les sous-ensembles V'_1, \dots, V'_k de sommets de $G \square P_l$, où chaque V'_i résulte de l'extension de V_i dans celui-ci. Observons que comme $\bigcup_{i=1}^k V_i = V(G)$, alors $\bigcup_{i=1}^k V'_i = V(G \square P_l)$.

Comme R est une réalisation récursive de ρ dans G , alors $G[V_i]$ est R-AP quelque soit $i \in [1, k]$; de plus, on a $k \geq 2$ de par la non trivialité de Λ , d'où $|V_i| \leq n-1$. D'après l'hypothèse d'induction, nous avons donc que $G[V_i] \square P_l = (G \square P_l)[V'_i]$ est R-AP pour tout $i \in [1, k]$ (voir figure 3.10.b). Or, comme, par construction, $|V'_i| = \rho_i \cdot l = \|\Lambda_i\|$, chaque sous-séquence Λ_i admet donc une réalisation R_i dans $(G \square P_l)[V'_i]$; il est alors facile de voir que $\bigcup_{i=1}^k R_i$ est une réalisation de τ dans $G \square P_l$.

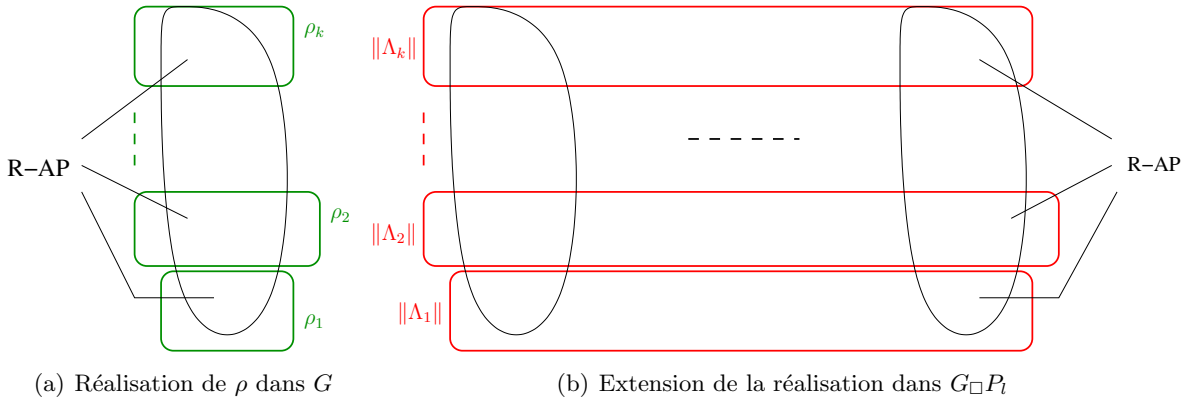


Figure 3.10 – Utilisation de la récursivité pour montrer que $G \square P_l$ est AP lorsque G est R-AP

5. Il s'agit du tripode $P(1, 1, 2)$.

Finalement, nous avons bien prouvé que la proposition est vraie par induction sur l'ordre de G . \square

Bien entendu, ce résultat reste incomplet du fait qu'il repose sur une hypothèse dont nous ne pouvons déterminer la véracité; une nécessité future, si l'on souhaite s'appuyer sur cette stratégie pour prouver que $G_{\square}P_l$ est AP lorsque G est R-AP, sera donc de confirmer, si tant est que ce soit vrai, que toute séquence atomique pour l est bien réalisable dans $G_{\square}P_l$. Afin d'avancer sur la question, nous allons caractériser ces séquences grâce au lemme suivant :

Lemme 3 :

Soit $p \geq 2$ un entier, et $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_p)$ une séquence composée de p éléments. Il existe nécessairement une sous-séquence ρ de τ telle que $\|\rho\| \equiv 0 \pmod{p}$.

Preuve :

Pour tout $i \in [1, p]$, dénotons par s_i la somme des i premiers éléments de τ , à savoir $s_i = \sum_{j=1}^i \tau_j$, et par $k_i \geq 0$ et $r_i \geq 0$ les entiers tels que $s_i = (k_i \cdot p) + r_i$. S'il existe un i tel que $r_i = 0$, alors la séquence $\rho = \bigcup_{j=1}^i \{\tau_j\}$ vérifie $\|\rho\| \equiv 0 \pmod{p}$ comme désiré.

Supposons donc que $\forall i \in [1, p], r_i \neq 0$; il n'y a donc que $p-1$ valeurs possibles modulo p pour chaque r_i . Du fait qu'il existe p valeurs r_i , d'après le principe des tiroirs il existe nécessairement deux entiers $i \neq j$, tels que $r_i = r_j$. Il est alors facile de voir que la séquence $\rho = \bigcup_{x=i+1}^j \{\tau_x\}$ est une sous-séquence de τ telle que $\|\rho\| \equiv 0 \pmod{p}$. \square

Observons que ce résultat est optimal : si τ possède strictement moins de p éléments, rien ne garantit qu'elle admette une sous-séquence dont la norme est un multiple de p . Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$, avec $k \leq p-1$, où $\tau_i \equiv 1 \pmod{p}$ pour tout $i \in [1, k]$.

Ce résultat va nous permettre de déterminer précisément le nombre maximum d'éléments composant une séquence atomique pour l :

Conséquence 10 :

Soient $l \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers, et τ une séquence admissible pour nl . Si $|\tau| \geq l+1$, alors τ possède une l -explosion non triviale.

En effet, notons $\lambda = (\tau_1, \dots, \tau_l)$ la sous-séquence de τ composée de ses l premiers éléments. D'après le Lemme 3, il existe obligatoirement une sous-séquence de λ , ρ , telle que $\|\rho\| \equiv 0 \pmod{l}$. Comme $\|\tau\| \equiv 0 \pmod{l}$, il est alors facile de voir que $(\rho, \tau \setminus \rho)$ est une l -explosion non triviale de τ .

Ainsi, les séquences sur lesquelles nous devons concentrer nos efforts dans de futurs travaux pour prouver l'Hypothèse 1 (page 64) sont celles possédant au plus l éléments et n'étant pas l -explosables.

3.4.4 Cas où G est AP, non traçable, non AP+1 et non R-AP

Prouver que le graphe $G \square P_l$ est AP lorsque G l'est semble, sur le papier, être plus difficile que les cas que nous avons traités précédemment car la structure de G ne permet pas, à première vue, l'élaboration d'une stratégie basée sur une contrainte forte de celle-ci, ce que permettaient les versions récursive et avec préaffectation d'un sommet de la partition arbitraire.

Concrètement, la seule chose sur laquelle nous pouvons compter dans le cas où G est strictement AP est le fait qu'il puisse être partitionné en sous-graphes connexes. En s'appuyant sur cette caractéristique, il est possible d'utiliser de nouveau le principe que nous avons utilisé dans le cadre des graphes R-AP (section 3.4.3 page 63), à savoir que si une séquence τ est l -explosable alors il est possible de séparer $G \square P_l$ en sous-graphes disjoints pour la réalisation de sous-séquences de τ . La seule différence ici est que ceux-ci ne seront plus R-AP comme précédemment, mais seulement 2-connexes⁶ d'après le théorème de Sabidussi que nous avons mentionné.

Observons qu'il n'existe pas une compatibilité systématique entre les notions de biconnexité et de réalisation de séquences : en effet, plus une séquence va comporter d'éléments et plus sa réalisation dans un graphe G 2-connexe donné sera susceptible de déconnecter ce dernier. En revanche, il existe une garantie sur la réalisation d'une séquence τ dans un tel graphe, à savoir que si $|\tau| \leq 2$ alors cette dernière y est nécessairement réalisable (Conséquence 6 page 50). De ce fait, si nous arrivons à séparer τ en sous-séquences comportant peu d'éléments et que nous pouvons dédier des sous-graphes disjoints de $G \square P_l$ à la réalisation de celles-ci, alors nous pourrions utiliser la stratégie décrite ci-dessus.

Nous illustrons, dans les propositions suivantes, ce principe pour de petites valeurs de l , à savoir pour $l \in [2, 4]$. Précisons que la question a déjà été considérée par des chercheurs qui auraient prouvé que $G \square P_l$ est AP lorsque G l'est pour tout $l \in [2, 5]$ ⁷. Cependant, n'ayant pu nous procurer leurs travaux, nous ne savons pas si la stratégie qu'ils ont utilisée ressemble à la nôtre ou non.

Proposition 24 :

Soit G un graphe. Si G est AP, alors $G \square P_2$ est AP.

Preuve :

Pour prouver ce résultat, il suffit de montrer que toute séquence τ admissible pour $2n$, où n est l'ordre de G , est réalisable dans $G \square P_2$. Pour cela, nous allons utiliser une stratégie similaire à celle que nous avons utilisée pour prouver la Proposition 23 (page 65) : à partir de τ , nous allons construire une séquence ρ admissible pour n qui permettra, à partir de sa réalisation dans G , de définir des sous-graphes disjoints de $G \square P_2$ dans lesquels seront réalisées des sous-séquences de τ composées d'au plus deux éléments.

Si $|\tau| \leq 2$, alors, d'après la Conséquence 6 (page 50), τ est réalisable dans $G \square P_2$ puisque ce graphe est isomorphe à une chaîne si $G \simeq K_1$, ou 2-connexe sinon puisque G est connexe. Dans ce dernier cas, on peut utiliser le théorème de Györi (Théorème 7 page 49) pour exhiber une réalisation de τ dans celui-ci.

Lorsque $|\tau| \geq 3$, τ admet, d'après la Conséquence 10 (page 66), une 2-explosion non triviale $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$; nous pouvons également supposer que celle-ci vérifie $\forall i \in [1, k], |\Lambda_i| \leq 2$. Il est, en effet, toujours possible d'obtenir une telle 2-explosion : si $|\Lambda_i| \geq 3$ pour un i quelconque, alors comme $\|\Lambda_i\| \equiv 0 \pmod{2}$, Λ_i admet elle-même une 2-explosion non triviale. En 2-explosant successivement les sous-séquences de Λ contenant strictement plus de deux éléments, on finira

6. Ou traçables si les sous-graphes en question résultent de l'extension d'un unique sommet de G .

7. Communication privée.

nécessairement par obtenir une 2-explosion de τ satisfaisant cette contrainte. Plus précisément, dans une telle explosion, chaque Λ_i est composé soit d'un unique entier pair, soit de deux entiers impairs.

Ramenons-nous alors à une séquence ρ admissible pour n de la manière suivante : $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$, où $\forall i \in [1, k]$, $\rho_i = \frac{\|\Lambda_i\|}{2}$. Comme $\sum_{i=1}^k \|\Lambda_i\| = 2n$, il est facile de voir que $\|\rho\| = n$ comme souhaité. De plus, remarquons que chaque ρ_i est un nombre entier puisque la norme de tout Λ_i est un multiple de 2.

Considérons alors $R = (V_1, \dots, V_k)$ une réalisation de ρ dans G , et notons V'_1, \dots, V'_k les sous-ensembles de sommets de $G_{\square}P_2$ tels que chaque V'_i résulte de l'extension de V_i dans celui-ci (voir figure 3.11.a). Remarquons que $\bigcup_{i=1}^k V'_i = V(G_{\square}P_2)$ puisque R est une réalisation de ρ dans G , et que $|V'_i| = 2 \cdot \rho_i = \|\Lambda_i\|$ quel que soit $i \in [1, k]$.

Chaque sous-séquence Λ_i étant composée d'au plus deux éléments, on peut déduire une réalisation R_i de celle-ci dans $(G_{\square}P_2)[V'_i]$ qui est isomorphe à une chaîne si V_i est un singleton, ou 2-connexe sinon puisque $G[V_i]$ est connexe (Conséquence 6 page 50) (voir la figure 3.11.b). Il est alors facile de voir que $\bigcup_{i=1}^k R_i$ est une réalisation de τ dans $G_{\square}P_2$ puisque chaque élément de τ appartient à une sous-séquence de Λ qui a été réalisée dans un sous-graphe de $G_{\square}P_2$.

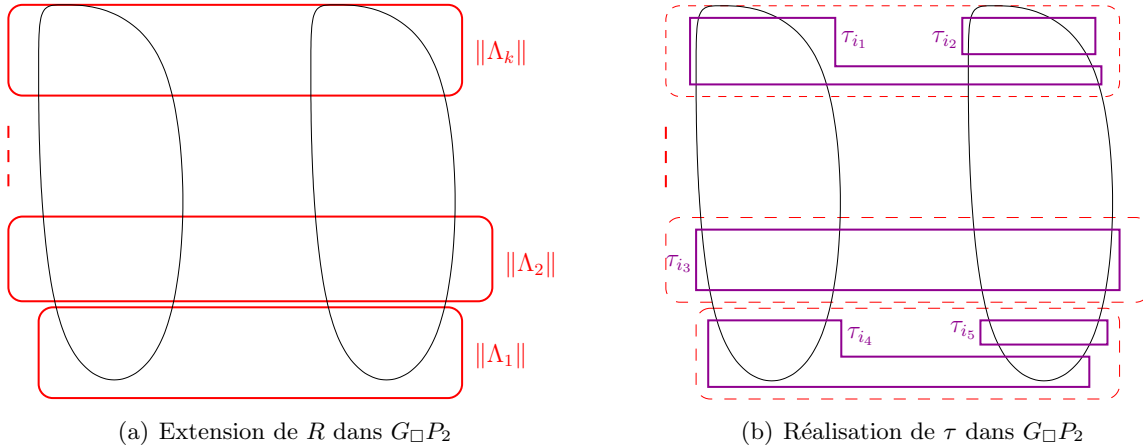


Figure 3.11 – Réalisation d'une séquence dans $G_{\square}P_2$ lorsque G est AP

□

Pour pouvoir prouver que cette proposition est également vraie lorsque $l = 3$, nous avons besoin d'introduire un lemme concernant la réalisation de séquences contenant au plus trois éléments dans un graphe résultant du produit cartésien d'un graphe seulement connexe et de P_3 .

Lemme 4 :

Soit G un graphe connexe d'ordre n , et τ une séquence admissible pour $3n$. Si $|\tau| \leq 3$, alors τ est réalisable dans $G_{\square}P_3$.

Preuve :

Tout d'abord, observons que si $G \simeq K_1$, alors $G_{\square}P_3 \simeq P_3$, graphe dans lequel toute séquence est réalisable. Supposons donc que $G \not\simeq K_1$. Comme G est connexe, $G_{\square}P_3$ est 2-connexe d'après le théorème de Sabidussi que nous avons présenté page 60 ; de là, si $|\tau| \leq 2$, alors τ est réalisable dans $G_{\square}P_3$ d'après la Conséquence 6 (page 50).

Si $|\tau| = 3$, posons $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Comme $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$ et que $\sum_{i=1}^3 \tau_i = 3n$, alors nécessairement $\tau_1 \leq n$. Remarquons que si $\tau_1 = n$, alors obligatoirement $\tau_2 = \tau_3 = n$; dans ce cas, une réalisation triviale de τ dans $G_{\square}P_3$ est alors $(V(G^1), V(G^2), V(G^3))$, où chaque G^i est, rappelons-le, la $i^{\text{ème}}$ copie de G dans $G_{\square}P_3$. Au contraire, si $\tau_1 \leq n - 1$, deux cas peuvent alors se produire.

En premier lieu, on peut avoir $\tau_2 \leq n - 1$; obligatoirement, on a donc $\tau_3 \geq n + 1$. Considérons alors la réalisation (V_1, V_2, V_3) de τ dans $G_{\square}P_3$ dont les sous-ensembles sont choisis de la manière suivante :

- $V_1 \subset V(G^1)$ est un sous-ensemble de sommets de la 1^{ère} copie de G dans $G_{\square}P_3$ tel que $G^1[V_1]$ soit un sous-graphe connexe d'ordre τ_1 ,
- $V_2 \subset V(G^3)$ est choisi dans la 3^{ème} copie de G dans $G_{\square}P_3$ de sorte que $G^3[V_2]$ soit un sous-graphe connexe d'ordre τ_2 ,
- $V_3 = V(G_{\square}P_3) \setminus (V_1 \cup V_2)$.

Notons que les sous-graphes $G^1[V(G^1) \setminus V_1]$ et $G^3[V(G^3) \setminus V_2]$ ne sont pas obligatoirement connexes. Cependant, le fait que $V(G^2) \subset V_3$ garantit que $(G_{\square}P_3)[V_3]$ est connexe puisque tout sommet de G^1 ou G^3 contient, par construction, au moins un voisin dans G^2 .

Finalement, les sous-ensembles V_1, V_2 et V_3 induisent trois sous-graphes de $G_{\square}P_3$ vérifiant bien les contraintes de taille et de connexité désirées, ce qui fait de (V_1, V_2, V_3) une réalisation correcte de τ dans $G_{\square}P_3$ (voir figure 3.12.a).

En second lieu, on peut avoir $\tau_2 \geq n$, ce qui induit que $\tau_3 \geq n$. Une réalisation possible de τ est alors la suivante :

- $V_1 \subset V(G^2)$ est un sous-ensemble de sommets de la 2^{ème} copie de G dans $G_{\square}P_3$ tel que $G^2[V_1]$ soit un sous-graphe connexe de G^2 d'ordre τ_1 . Notons $v_1, \dots, v_{n-\tau_1}$ les sommets de $V(G^2) \setminus V_1$.
- $V_2 = V(G^1) \cup \{v_1, \dots, v_{\tau_2-n}\}$.
- $V_3 = V(G^3) \cup \{v_{\tau_2-n+1}, \dots, v_{n-\tau_1}\}$.

De la même manière que précédemment, il est facilement observable que le choix de V_1 peut déconnecter G^2 . Cependant, le fait que tous les sommets de $V(G^2) \setminus V_1$ aient un voisin dans G^1 et dans G^3 garantit, puisque V_2 et V_3 englobent $V(G^1)$ et $V(G^3)$, que $(G_{\square}P_3)[V_2]$ et $(G_{\square}P_3)[V_3]$ sont bien connexes. Encore une fois, (V_1, V_2, V_3) est une réalisation correcte de τ dans $G_{\square}P_3$ (voir figure 3.12.b). \square

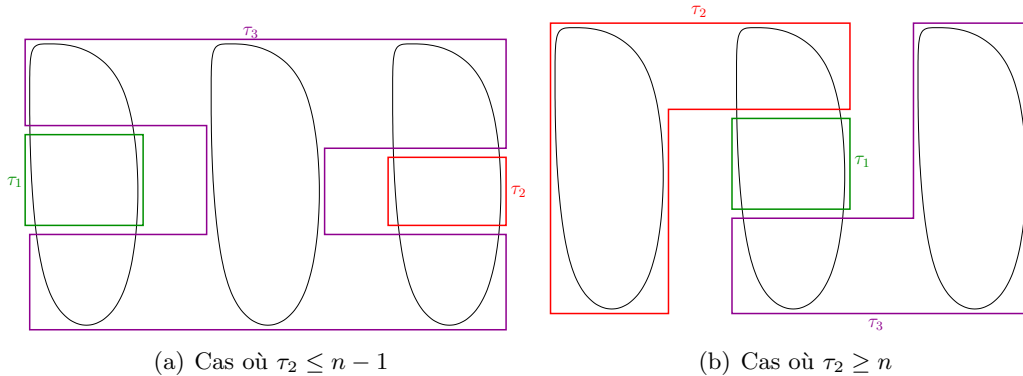


Figure 3.12 – Réalisation d'une séquence de trois éléments dans $G_{\square}P_3$ lorsque G est connexe

Grâce à ce lemme, nous allons finalement pouvoir prouver que le graphe résultant du produit cartésien de P_3 et d'un graphe AP est toujours arbitrairement partitionnable :

Proposition 25 :

Soit G un graphe. Si G est AP, alors $G_{\square}P_3$ est AP.

Preuve :

Pour prouver cette proposition, nous allons utiliser une procédure identique à celle que nous avons appliquée pour le cas $l = 2$ (Proposition 24 page 67), à savoir montrer que toute séquence τ admissible pour $3n$ peut être réalisée dans $G_{\square}P_3$ en la subdivisant puis en réalisant chacune de ses sous-séquences dans des sous-graphes disjoints de ce graphe.

Pour commencer, observons que si $|\tau| \leq 3$ alors τ est directement réalisable dans $G_{\square}P_3$ en utilisant le Lemme 4 (page 68) puisque la partition arbitraire de G implique sa connexité.

Supposons donc que l'on ait $|\tau| \geq 4$; comme τ est admissible pour $3n$, elle admet, d'après la Conséquence 10 (page 66), une 3-explosion non triviale. Comme précédemment, nous pouvons supposer qu'il en existe une, $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$, telle que $\forall i \in [1, k]$, $|\Lambda_i| \leq 3$; pour s'en convaincre, il suffit d'observer que pour tout $i \in [1, k]$ on a $\|\Lambda_i\| \equiv 0 \pmod{3}$, et donc que si $|\Lambda_i| \geq 4$, alors il est possible d'obtenir une nouvelle 3-explosion de τ , à savoir $\Lambda \setminus \{\Lambda_i\} \cup \Lambda'$, où Λ' est une 3-explosion non triviale de Λ_i . En répétant ce procédé sur toute séquence de Λ contenant au moins quatre éléments, on finira nécessairement par obtenir une 3-explosion de τ satisfaisant cette contrainte.

Finalement, la séquence $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ admissible pour n peut être construite comme précédemment, à savoir $\rho_i = \frac{\|\Lambda_i\|}{3}$ pour tout $i \in [1, k]$. Celle-ci admet une réalisation $R = (V_1, \dots, V_k)$ dans G qui permet, par extension de chaque V_i dans $G_{\square}P_3$ en un sous-ensemble V'_i , de séparer le graphe $G_{\square}P_3$ en k sous-graphes disjoints induits par les sous-ensembles de sommets V'_1, \dots, V'_k dans lesquels nous allons pouvoir indépendamment réaliser chaque sous-séquence de τ appartenant à Λ .

L'existence d'une réalisation R_i de la sous-séquence Λ_i dans $(G_{\square}P_3)[V'_i]$ découle alors directement de l'utilisation du Lemme 4 (page 68) : comme $|\Lambda_i| \leq 3$ et que $G[V_i]$ est connexe, Λ_i est nécessairement réalisable dans $G[V_i]_{\square}P_3 \simeq (G_{\square}P_3)[V'_i]$. Finalement, comme tout élément de τ appartient à une séquence de Λ qui a été réalisée sans problème dans $G_{\square}P_3$, il est simple de voir que $\bigcup_{i=1}^k R_i$ est une réalisation globale de τ dans celui-ci. \square

Il est important de remarquer que le bon fonctionnement de la procédure que nous avons utilisée jusqu'à maintenant pour réaliser une séquence τ dans le graphe $G_{\square}P_l$ est assuré par le fait que, pour de petites valeurs de l , il est toujours possible de trouver une l -explosion de τ telle que toutes ses sous-séquences contiennent peu d'éléments (idéalement deux). Cependant, pour de plus grandes valeurs de l , notre procédure ne fonctionne plus nécessairement puisque les sous-séquences issues d'une l -explosion contiennent au plus l éléments (Conséquence 10 page 66); de ce fait, si nous l'utilisons pour un $l \geq 4$ nous serons obligés de nous frotter à la réalisation d'une sous-séquence de τ composée d'au moins quatre entiers dans un sous-graphe de $G_{\square}P_l$, ce que nous ne savons pas faire systématiquement.

Une méthode fonctionnant pour $l = 4$, basée sur un principe similaire, consiste à ramener la réalisation dans $G_{\square}P_4$ d'une séquence τ admissible pour $4n$ à celle dans $G_{\square}P_2$ d'une séquence ρ admissible pour $2n$. Pour pouvoir l'utiliser, nous avons besoin de mettre en avant l'existence d'une réalisation particulière d'une séquence composée de deux éléments dans $G_{\square}P_2$, où G est seulement connexe :

Remarque 4 :

Soit G un graphe connexe d'ordre n , et $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ une séquence admissible pour $2n$. Il existe une réalisation (V_1, V_2) de τ dans $G_{\square}P_2$ telle que $V_1 \subseteq V(G^1)$, $G^1[V_1]$ soit connexe, et $G^1[V(G^1) \setminus V_1]$ ne le soit pas nécessairement.

L'existence d'une telle réalisation de τ dans $G_{\square}P_2$ est triviale à montrer. Si $\tau_1 = \tau_2 = n$, observons que la réalisation $(V(G^1), V(G^2))$ satisfait ces contraintes ; en revanche, si $\tau_1 < \tau_2$, considérons alors $(V_1, V(G_{\square}P_2) \setminus V_1)$ où $V_1 \subset V(G^1)$ est tel que $G^1[V_1]$ soit un sous-graphe connexe de G^1 d'ordre τ_1 .

Proposition 26 :

Soit G un graphe. Si G est AP, alors $G_{\square}P_4$ est AP.

Preuve :

Nous allons montrer que toute séquence τ admissible pour $4n$, l'ordre de $G_{\square}P_4$, admet une réalisation dans ce graphe ; pour cela, nous allons construire, à partir de τ , une nouvelle séquence ρ admissible pour $2n$ dont la réalisation dans $G_{\square}P_2$ nous permettra de déduire une réalisation de τ dans $G_{\square}P_4$.

Remarquons que si $|\tau| \leq 2$, alors τ est directement réalisable dans $G_{\square}P_4$ en utilisant la Conséquence 6 (page 50). Supposons donc que τ contienne au moins trois éléments ; comme τ est admissible pour $4n$ qui est pair, il est facile de voir qu'il existe une 2-explosion non triviale $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$ de τ telle que $\forall i \in [1, k]$, $|\Lambda_i| \leq 2$ (la raison est similaire à celle que nous avons évoquée dans la preuve de la Proposition 24 page 67). En particulier, observons qu'une sous-séquence Λ_i est composée d'un unique entier pair ou de deux entiers impairs.

La séquence $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ est construite de la manière suivante : $\forall i \in [1, k]$, $\rho_i = \frac{\|\Lambda_i\|}{2}$. Comme τ est admissible pour $4n$, ρ est admissible pour $2n$ comme souhaité et admet donc, d'après la Proposition 24 (page 67), une réalisation dans $G_{\square}P_2$ puisque G est AP. En particulier, considérons $R = (V_1, \dots, V_k)$ une réalisation de ρ dans ce graphe résultant de l'utilisation de la méthode décrite dans la Proposition 24. Plus précisément, pour tout $i \in [1, k]$, soit V_i résulte de l'extension d'un sous-ensemble de sommets de G (cas où ρ_i est pair), soit il existe un $j \in [1, k]$, $i \neq j$, tel que $V_i \cup V_j$ a été obtenu par une telle extension (cas où ρ_i et ρ_j sont tous les deux impairs). Dans ce dernier cas, nous pouvons supposer que les sous-ensembles V_i et V_j sont tels que décrits par la Remarque 4.

Nous allons désormais nous servir de la réalisation R de ρ dans $G_{\square}P_2$ afin d'en obtenir une de τ dans $G_{\square}P_4$; plus précisément, chaque sous-ensemble $V_i \in R$ va définir un sous-graphe de $G_{\square}P_4$ dans lequel sera réalisée la sous-séquence Λ_i en une réalisation R_i . Rappelons qu'à chaque élément ρ_i de ρ correspond Λ_i , qui vérifie $|\Lambda_i| \leq 2$; concrètement, nous allons donc devoir, à partir d'un sous-ensemble $V_i \subset V(G_{\square}P_2)$, créer un sous-ensemble $V'_i \subset V(G_{\square}P_4)$ vérifiant $|V'_i| = 2 \cdot |V_i|$ puisque $\rho_i = \frac{\|\Lambda_i\|}{2}$, c'est-à-dire suffisamment grand pour pouvoir réaliser Λ_i dans $(G_{\square}P_4)[V'_i]$. D'après la manière dont a été construite R (utilisation de la Remarque 4), il est possible que l'un des sous-graphes de l'une des copies de G dans $G_{\square}P_2$ induits par $V_i \subset V(G_{\square}P_2)$ ne soit pas connexe ; la difficulté pour définir chaque V'_i va donc être de faire en sorte que l'extension de V_i dans $G_{\square}P_4$ induise un sous-graphe suffisamment connexe pour pouvoir y réaliser une séquence composée d'au plus deux éléments.

Pour cela, nous allons avoir besoin d'identifier deux cas. Le premier, le plus simple, est celui où le sous-ensemble V_i résulte de l'extension d'un sous-ensemble de sommets de G dans $G_{\square}P_2$. Le second, qui est un peu plus délicat à traiter, correspond à la situation où l'extension a été divisée en deux sous-ensembles V_i et V_j afin d'accueillir la réalisation de deux éléments de ρ . Dans ce cas, l'extension dans $G_{\square}P_4$ que nous devons effectuer sera moins traditionnelle que celles que nous avons pu effectuer jusqu'à maintenant.

Si V_i résulte de l'extension d'un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$ de sommets de G , autrement dit si ρ_i est pair, V'_i peut être choisi en étendant S dans $G_{\square}P_4$, à savoir $V'_i = \bigcup_{j=1}^4 S^j$. Comme $\rho_i = \frac{\|\Lambda_i\|}{2}$ et que $V_i = S^1 \cup S^2$, on a bien $|V'_i| = \|\Lambda_i\|$; observons alors que comme $G[S]$ est connexe, $G[S]_{\square}P_4 \simeq (G_{\square}P_4)[V'_i]$ est traçable ou 2-connexe d'après le théorème de Sabidussi. D'après la Conséquence 6 (page 50), il est donc possible d'y réaliser Λ_i qui contient, rappelons-le, au plus deux éléments.

Sinon, c'est qu'il existe un $j \in [1, k]$, $i \neq j$, tel que $V_i \cup V_j$ a été obtenu par extension d'un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$ de sommets de G ; plus précisément, il s'agit du cas où ρ_i et ρ_j sont tous les deux impairs. Rappelons que ces deux sous-ensembles ont été choisis afin de former une réalisation de (ρ_i, ρ_j) dans $(G_{\square}P_2)[V_i \cup V_j]$ satisfaisant les contraintes de la Remarque 4 (page 71). En particulier, sans perte de généralité, on peut supposer que $V_i = W^1 \subseteq S^1$, $G^1[V_i]$ soit connexe, et $V_j = (S^1 \cup S^2) \setminus V_i$.

Observons que si nous étendons W dans $G_{\square}P_4$ en doublant simplement sa taille (c'est-à-dire en considérant $V'_i = W^1 \cup W^2$, $V'_i = W^2 \cup W^3$, ou $V'_i = W^3 \cup W^4$) le sous-graphe résultant sera traçable ou 2-connexe puisque $(G_{\square}P_2)[V_i]$ est connexe; de ce fait, si le sous-ensemble V'_i est choisi de cette manière, il sera simple d'y réaliser la sous-séquence Λ_i puisque cette dernière contient au plus deux éléments par construction (Conséquence 6 page 50).

Si $|\Lambda_j| = 1$, on peut choisir $V'_i = W^1 \cup W^2$ et $V'_j = V(G_{\square}P_4) \setminus V'_i$. Il est facile de voir que, dans ce cas, $(G_{\square}P_4)[V'_j]$ est bien connexe d'ordre $\|\Lambda_j\|$ et que $R_j = (V'_j)$ est une réalisation de Λ_j dans $G_{\square}P_4$. De plus, comme nous l'avons expliqué plus haut, $(G_{\square}P_4)[V'_i]$ est traçable ou 2-connexe, ce qui implique qu'il est possible d'y trouver une réalisation R_i de Λ_i .

Sinon, notons $\Lambda_j = (\lambda_1, \lambda_2)$; nous devons distinguer deux cas :

- Si $\lambda_1 \leq n - 1$, considérons R_i une réalisation de Λ_i dans $(G_{\square}P_4)[W^1 \cup W^2]$ qui existe nécessairement comme nous l'avons expliqué plus haut. Concernant Λ_j , considérons la réalisation $R_j = (V_1, V_2)$, où $V_1 \subset V(G^4)$ est tel que $G^4[V_1]$ soit un sous-graphe connexe quelconque d'ordre λ_1 de G^4 , et $V_2 = V(G_{\square}P_4) \setminus (V_1 \cup R_i)$. Remarquons notamment que V_2 occupe tous les sommets de G^3 , ce qui implique que tout sommet de G^2 ou G^4 y possède un voisin et donc que $(G_{\square}P_4)[V'_j]$ est bien connexe (voir figure 3.13.a).
- Si $\lambda_1 \geq n$, choisissons R_i une réalisation de Λ_i dans $(G_{\square}P_4)[W^2 \cup W^3]$, qui, comme précédemment, existe nécessairement. Pour Λ_j , nous pouvons considérer $R_j = (V_1, V_2)$ où $V_1 = V(G^1) \cup X$, $V_2 = V(G^4) \cup Y$ et $X \cup Y = (V(G^2) \cup V(G^3)) \setminus R_i$. Pour le choix des sous-ensembles X et Y , on pourra notamment s'appuyer sur le fait que $\lambda_1 \leq \lambda_2$, qui implique que $|X| \leq |V(G^2) \setminus R_i|$; ainsi, on peut prendre pour X des sommets quelconques de $V(G^2) \setminus R_i$, et placer le reste des sommets dans Y . Remarquons notamment que $(V(G^3) \setminus R_i) \subseteq Y$. R_j est alors une réalisation correcte de Λ_j dans $G_{\square}P_4$: comme V_1 englobe tous les sommets de G^1 , cela implique que tous les sommets de X y ont un voisin et donc que $(G_{\square}P_4)[V_1]$ est connexe; $(G_{\square}P_4)[V_2]$ l'est également car V_2 contient tous les sommets de G^4 , tous les sommets de Y appartenant à $V(G^3) \setminus R_i$ ont un voisin dans G^4 , et tout sommet de Y de $V(G^2) \setminus R_i$ possède un voisin dans $V(G^3) \setminus R_i$ (voir figure 3.13.b).

Finalement, il est possible de réaliser toutes les sous-séquences de la 2-explosion Λ de τ dans $G_{\square}P_4$. Il est alors facile de voir que $\bigcup_{i=1}^k R_i$ forme une réalisation de τ dans ce graphe puisque chacun de ses éléments appartient à l'une des sous-séquences de Λ .

□

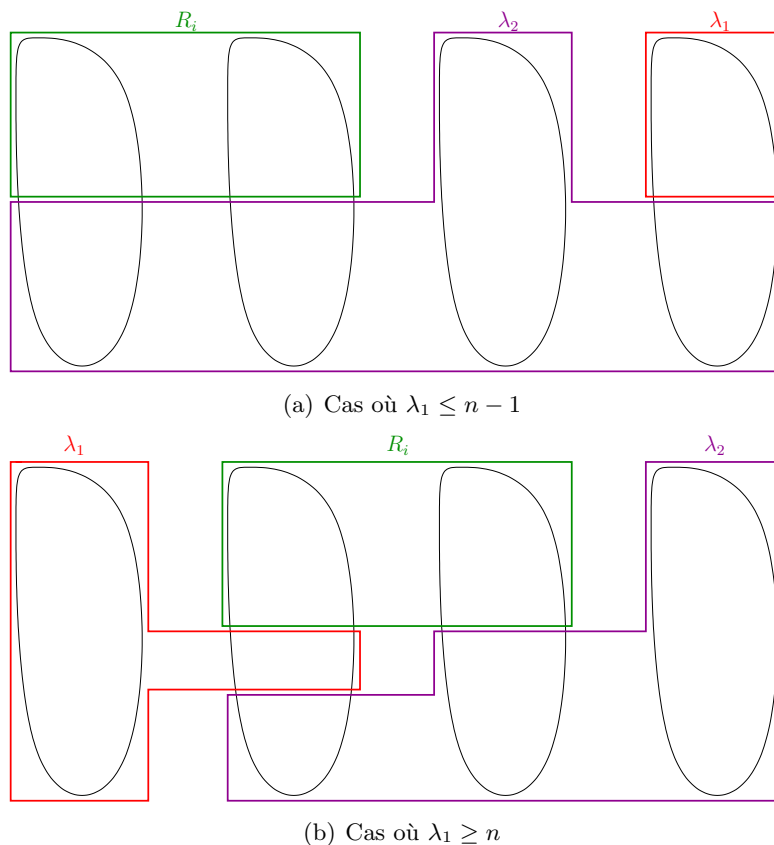


Figure 3.13 – Réalisation de deux sous-séquences dans $G_{\square}P_4$ lorsque G est connexe

Comme nous l'avons expliqué, la stratégie que nous venons de présenter pour prouver que $G_{\square}P_l$ est AP lorsque G l'est et que $l \in [2, 4]$ repose sur le principe que, pour de petites valeurs de l , il est possible de diviser une séquence τ en sous-séquences comportant peu d'éléments et admissibles pour un multiple de l . Cependant, celle-ci ne semble pas pouvoir fonctionner pour tout l puisque dans certains cas il est impossible de créer de telles sous-séquences. Typiquement, un cas pathologique intervient lorsque $l \geq 5$ est premier : en effet, dans cette situation, comme l n'est divisible que par lui-même, la seule méthode possible consiste alors à s'inspirer, pour trouver une réalisation de τ dans $G_{\square}P_l$, de la réalisation R d'une séquence auxiliaire admissible pour n dans G construite à partir de τ . Le problème est que, dans ce cas, nous devons réaliser des sous-séquences de τ dans l'extension des sous-ensembles de R dans $G_{\square}P_l$ alors que ces dernières peuvent contenir au plus l éléments (Conséquence 10 page 66). Or, nous ne savons pas obtenir systématiquement une réalisation d'une telle sous-séquence dans un tel graphe lorsque celle-ci possède plus de deux ou trois éléments.

Pour pouvoir avancer vers une généralisation de ce résultat, une solution pourrait consister à étudier, avec notre méthode, le cas où l n'est pas premier afin de pouvoir se reporter à la réalisation de sous-séquences admissibles pour un multiple de l' dans $G_{\square}P_{l'}$, où $l' \in [2, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor]$ divise l , tout en minimisant le nombre maximum d'éléments contenus dans celles-ci afin de retrouver un cas que nous savons traiter.

3.4.5 À propos de la récursivité de la partition arbitraire de $G_{\square}P_2$

Pour en finir avec l'étude de la partition arbitraire du produit cartésien de graphes AP par des chaînes, nous allons nous pencher sur une version plus forte de la Question 2 (page 60) que nous avons posée ; plus précisément, nous allons essayer de déterminer si cette construction préserve la récursivité de la partition arbitraire :

Question 3 :

Soient G un graphe, et $l \geq 2$ un entier. Si G est R-AP, $G_{\square}P_l$ est-il obligatoirement R-AP ?

Il semble difficile, encore une fois, de pouvoir apporter directement une réponse globale à cette question. De ce fait, nous allons donner quelques éléments de réflexion concernant le cas le plus simple, à savoir celui où $l = 2$.

Pour montrer que toute séquence admissible pour $2n$ est récursivement réalisable dans $G_{\square}P_2$, l'idée la plus naturelle consiste à se servir de nouveau du principe que nous avons utilisé dans la section 3.4.3 (page 63), à savoir qu'il est possible d'avoir recours à un raisonnement par induction sur l'ordre de G dont le principe repose essentiellement sur la réalisation des séquences atomiques pour 2 dans $H_{\square}P_2$, où H est un sous-graphe R-AP de G . Ainsi, si nous arrivons à montrer que toute telle séquence est récursivement réalisable dans $G_{\square}P_2$ pour tout G R-AP, alors nous aurons apporté une réponse positive à la Question 3 que nous venons de poser appliquée au cas $l = 2$.

La Conséquence 10 (page 66) nous permet de cerner précisément les séquences admissibles pour $2n$ atomiques pour 2, nous renseignant qu'il s'agit des séquences de type $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, où τ_1 et τ_2 sont tous les deux des entiers impairs. Remarquons que si $\tau_1 = \tau_2 = n$, τ est trivialement récursivement réalisable dans $G_{\square}P_2$, la réalisation $(V(G^1), V(G^2))$ faisant alors l'affaire.

Ainsi, il semble nécessaire d'étudier la réalisation récursive dans $G_{\square}P_2$ des séquences de type (τ_1, τ_2) vérifiant $\tau_1 + \tau_2 = 2n$ et $\tau_2 \geq n + 1$. L'idée la plus naturelle pour obtenir une telle réalisation (V_1, V_2) consiste à choisir $V_1 \subset V(G^1)$, et $V_2 = V(G^2) \cup S$, où $S = V(G^1) \setminus V_1$, les sous-ensembles V_1 et S étant choisis de manière judicieuse dans $V(G^1)$. En l'occurrence, il pourrait par exemple être intéressant de les choisir en faisant en sorte que $G^1[S]$ et $G^1[V_1]$ soient R-AP (voir figure 3.14), ce qui est toujours possible puisque G^1 est R-AP.

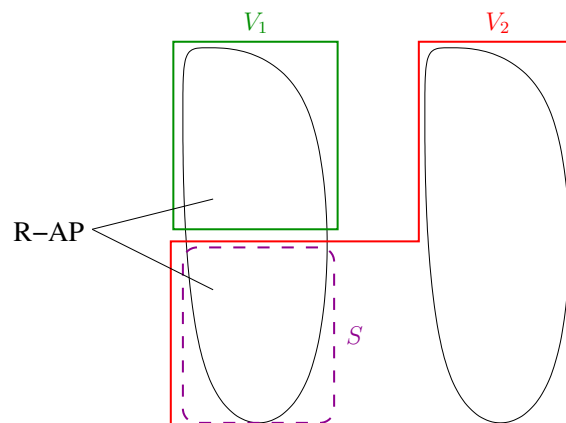


Figure 3.14 – Réalisation récursive hypothétique d'une séquence de deux éléments dans $G_{\square}P_2$

Malheureusement, ce procédé n'implique pas nécessairement la partition arbitraire récursive du sous-graphe $(G \square P_2)[V_2]$:

Proposition 27 :

Soit G un graphe R-AP d'ordre n , et $p \in [1, n - 1]$ un entier. Il n'existe pas obligatoirement, dans $G \square P_2$, de sous-ensemble $V_1 \subset V(G^1)$ tel que $|V_1| = p$, $G^1[V_1]$ et $G^1[V(G^1) \setminus V_1]$ soient R-AP, et $(G \square P_2)[V(G^2) \cup (V(G^1) \setminus V_1)]$ soit R-AP.

Preuve :

Pour s'en convaincre, considérons le produit cartésien $G \square P_2$, où $G \simeq \text{Cat}(2, 3)$, dont les sommets sont annotés de la manière suivante (figure 3.15) :

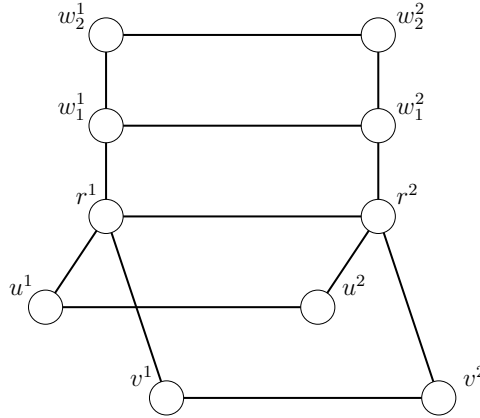


Figure 3.15 – Le graphe $\text{Cat}(2, 3) \square P_2$

Il suffit alors d'observer que pour $p = 4$, il n'est pas possible de trouver de sous-ensemble de sommets $V_1 \subset V(G^1)$ satisfaisant les contraintes que nous avons exprimées. En effet, les seuls choix possibles pour V_1 sont les sous-ensembles $\{u^1, r^1, w_1^1, w_2^1\}$ et $\{v^1, r^1, w_1^1, w_2^1\}$, mais pour chacun d'eux le sous-graphe $(G \square P_2)[V(G^2) \cup (V(G^1) \setminus V_1)]$ est isomorphe au graphe $\text{Cat}(3, 3)$ qui n'est pas R-AP (Théorème 5 page 16). \square

Il est néanmoins intéressant d'observer que même si cette méthode ne fonctionne pas dans le cas du graphe $\text{Cat}(2, 3)$, celui-ci ne constitue pas pour autant un contre-exemple permettant de répondre négativement à la Question 3 (page 74). En effet, il est facilement remarquable que le graphe $\text{Cat}(2, 3) \square P_2$ est traçable, et donc R-AP d'après le Théorème 4 (page 15). Ce résultat peut d'ailleurs se généraliser à tous les arbres R-AP :

Proposition 28 :

Soit T un arbre. Si T est R-AP, alors $T \square P_2$ est R-AP.

Preuve :

D'après le Théorème 5 (page 16), si T est un arbre R-AP, alors celui-ci est isomorphe à une chaîne ou à certains tripodes $P(a_1, a_2, a_3)$. Dans le premier cas, $T \square P_2$ est isomorphe à une grille et est donc toujours traçable (Proposition 21 page 61). Dans le second cas, dénotons par r la racine de T , par u_1, \dots, u_{a_1} les sommets de son premier bras, par v_1, \dots, v_{a_2} ceux de son deuxième bras, et par w_1, \dots, w_{a_3} ceux de son troisième bras en partant à chaque fois de leur sommet adjacent à r . Notons alors que $v_1^1, \dots, v_{a_2}^1, v_{a_2}^2, \dots, v_1^2, r^2, u_1^2, \dots, u_{a_1}^2, u_{a_1}^1, \dots, u_1^1, r^1, w_1^1, \dots, w_{a_3}^1, w_{a_3}^2, \dots, w_1^2$ est une chaîne hamiltonienne de $T \square P_2$.

Finalement, si T est un arbre R-AP, alors $T \square P_2$ est traçable et est donc trivialement R-AP d'après le Théorème 4 (page 15). \square

Ainsi, s'il existe un contre-exemple permettant d'apporter une réponse négative au fait que tout graphe $G \square P_2$ est R-AP lorsque G l'est, il s'agit d'un graphe n'étant pas un arbre. Or, nous ne connaissons pas beaucoup de tels graphes R-AP à l'heure actuelle en dehors de certains soleils, k -ballons avec $k \leq 5$, et graphes admettant une décomposition en deux oreilles. Cependant, il est facilement vérifiable que l'utilisation de l'un de ceux-ci en tant qu'opérande d'un produit cartésien par P_2 génère un graphe toujours traçable ; ces derniers ne permettent donc pas non plus, au même titre que les arbres, de trouver un contre-exemple potentiel permettant de répondre à la Question 3 (page 74) par la négative.

Un problème sous-jacent posé par cette question concerne donc l'existence d'un graphe R-AP dont le produit cartésien par P_2 ne serait pas traçable. Il semble, à première vue, difficile d'en trouver un du fait que cette construction a la particularité d'ajouter un nombre non négligeable de nouvelles arêtes au graphe résultant (relativement à son nombre de sommets), souvent suffisant pour le rendre traçable lorsque l'opérande ne l'est pas.

Pour en trouver un, et donc exhiber un contre-exemple réfutant la Question 3 (page 74), une possibilité serait d'étudier la récursivité de la partition arbitraire de graphes à la structure beaucoup plus complexe que celle des graphes R-AP que nous connaissons actuellement. Une alternative envisageable pour réfuter cette question pourrait être de trouver un contre-exemple plus simple mais en considérant un l strictement supérieur à 2. Dans les deux cas, cela demanderait de se frotter à vérifier la récursivité de la partition arbitraire de graphes ayant un nombre de sommets assez conséquent alors que nos connaissances actuelles des graphes R-AP ne nous permettent que de traiter le cas de graphes relativement simples.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre consacré à la partition arbitraire des graphes 2-connexes, nous avons principalement étudié deux constructions classiques de la théorie des graphes.

Pour commencer, nous nous sommes penchés sur les graphes admettant une décomposition en un cycle et deux oreilles. Les résultats que nous avons donnés sont assez évidents, mais notre intention est surtout de présenter une voie possible pour l'étude de la partition arbitraire des graphes 2-connexes, autrement dit de planter le décor pour des recherches plus appuyées sur le sujet.

Nous nous sommes ensuite principalement intéressés aux graphes résultant du produit cartésien entre un graphe AP avec ou sans contraintes et une chaîne de longueur $l \geq 2$ quelconque. Si nous avons pu prouver la partition arbitraire du graphe $G \square P_l$ lorsque G est traçable ou AP+1, les choses se sont rapidement compliquées lorsque nous avons supposé ce dernier R-AP ou simplement AP.

- Pour G R-AP, nous avons présenté une méthode par induction permettant de réaliser un grand nombre de séquences dans $G \square P_l$, à savoir celles étant l -explosables. Si celle-ci exploite au maximum la récursivité de la partition arbitraire de G , elle est néanmoins incomplète puisqu'elle repose sur une hypothèse dont nous ne pouvons assurer la valeur de vérité. En l'occurrence, nous ne savons pas si toute séquence atomique pour l est réalisable dans $G \square P_l$ quelque soit l'ordre de G . Il sera donc nécessaire, afin de valider notre stratégie, de travailler sur la question.
- Pour G simplement AP, nous avons introduit une méthode fonctionnant pour $l \in [2, 4]$ basée sur le principe de "diviser pour mieux régner", mais n'étant pas généralisable à

tout l du fait qu'à partir de $l = 5$ il n'est plus nécessairement possible de diviser une séquence en sous-séquences ayant un nombre d'éléments nous arrangeant. Il serait cependant intéressant d'étudier la réutilisabilité de notre stratégie pour des valeurs particulières de l , par exemple celles étant paires. En revanche, pour des valeurs plus particulières de l , comme des valeurs premières, il sera sans doute nécessaire de travailler à l'élaboration d'une méthode totalement différente pour arriver à nos fins.

Enfin, nous nous sommes également intéressés à la récursivité de la partition arbitraire de $G \square P_2$ lorsque G est R-AP. Nous avons notamment vu qu'il suffit de montrer que toute séquence composée de deux éléments impairs est récursivement réalisable dans $G \square P_2$, ce que nous n'avons pu faire, pour pouvoir affirmer qu'un tel graphe est toujours R-AP lorsque G l'est. Nous n'avons, de plus, pas réussi à infirmer cette proposition du fait que le produit cartésien par P_2 a tendance à construire des graphes traçables, et donc trivialement R-AP, lorsque l'opérande utilisé a une structure simple ; si un contre-exemple G existe réellement, cela signifie qu'il a certainement une structure plus complexe que celle des graphes R-AP connus à l'heure actuelle. Pour pouvoir avancer sur ces deux fronts, une nécessité sera donc de se focaliser sur la récursivité de la partition arbitraire de graphes moins simples, comme, idéalement, des graphes biconnexes.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire s'est principalement articulé autour de deux notions. Nous avons tout d'abord introduit celle de partition arbitraire avec une préaffectation avant de nous intéresser à celle de biconnexité, le lien logique entre celles-ci étant que la seconde est une condition nécessaire de la première.

Après avoir défini formellement la notion de partition arbitraire avec une préaffectation, nous avons exhibé des caractéristiques nécessairement possédées par les graphes dotés de cette propriété. Ces dernières nous ont permis de commencer à cerner le profil de ces graphes et de prouver l'existence de certains d'entre eux ; en particulier, nous avons montré que tous les graphes hamiltoniens sont AP+1 et introduit la classe des cylindres dont la partition arbitraire avec une préaffectation est moins évidente.

Nous avons ensuite essayé de situer la partition arbitraire avec une préaffectation dans la hiérarchie des versions de la partition arbitraire déjà établie (Théorème 4 page 15). Si nous avons pu caractériser précisément sa relation avec quelques autres versions, nous avons, par la suite, éprouvé quelques difficultés pour expliciter son lien avec les graphes OL-AP et R-AP, principalement dues à la biconnexité des graphes AP+1. En effet, du fait de notre méconnaissance des graphes AP 2-connexes, il nous est compliqué d'extraire des graphes AP+1 à la structure suffisamment compliquée pour que ces derniers ne soient pas OL-AP ou R-AP. À l'inverse, le fait que l'on sache peu de choses sur la frontière entre les graphes OL-AP et R-AP 2-connexes rend difficile la recherche d'un graphe AP+1 qui ne posséderait que l'une ou l'autre de ces deux propriétés. Il sera donc nécessaire de continuer à étudier la partition arbitraire dans le contexte de la biconnexité afin de pouvoir déterminer le lien exact entre ces trois versions de la partition arbitraire.

Afin d'avancer sur la question, nous avons finalement essayé de trouver de nouveaux graphes dotés de la partition arbitraire avec une préaffectation en nous focalisant sur la famille des ballons. Notre but premier était alors d'en trouver n'étant pas OL-AP et/ou R-AP. Si nous avons rapidement pu identifier que les ballons à quatre branches sont ceux nous intéressant le plus dans ce contexte, nous n'avons malheureusement pas réussi à nous prononcer concernant l'existence d'un tel ballon AP+1 malgré les conditions nécessaires sur la longueur de leurs branches que nous avons mises en avant. Il serait intéressant de poursuivre nos travaux, par exemple en étudiant la partition arbitraire des 4-ballons sectionnés qui jouent un rôle important dans la partition arbitraire avec une préaffectation des 4-ballons.

Nous avons ensuite étudié la relation entre la partition arbitraire et la biconnexité. Après avoir mis en avant des caractéristiques générales des graphes AP 2-connexes, nous nous sommes focalisés sur deux constructions classiques de la théorie des graphes.

Tout d’abord, nous avons étudié le cas des graphes 2-connexes admettant une décomposition en deux oreilles. Si les résultats que nous avons présentés sont relativement évidents, ils permettent néanmoins, au même titre que les définitions que nous avons posées, de planter le décor et d’ouvrir la voie à de futurs travaux plus intéressants sur la partition arbitraire de ces graphes.

Nous nous sommes ensuite principalement attardés sur le produit cartésien de graphes, l’idée étant d’essayer de montrer que le graphe $G_{\square}P_l$ est arbitrairement partitionnable pour différentes versions de la partition arbitraire de G . Si nous avons réussi à prouver cela pour tout $l \geq 2$ lorsque G est traçable ou AP+1, les choses se sont avérées plus compliquées lorsque G était supposé R-AP ou simplement AP :

- Dans le premier cas, nous avons proposé une stratégie inductive adaptée à la structure des graphes R-AP mais qui est dépendante de la réalisation de séquences particulières dans $G_{\square}P_l$, que nous n’avons pu garantir, à savoir celles atomiques pour l . Il sera donc nécessaire de travailler sur ce point grâce à la caractérisation que nous avons donnée de ces séquences.
- Dans le second cas, le principe que nous avons présenté fonctionne pour de petites valeurs de l , à savoir de 2 à 4, mais ne semble pas généralisable à tout l du fait qu’il soit basé sur un principe de division de séquence en sous-séquences ayant un profil nous arrangeant qui ne peut être employé pour certaines valeurs de l . Il serait néanmoins intéressant d’étudier la réutilisabilité de notre méthode, même s’il sera certainement nécessaire d’en imaginer une nouvelle pour des valeurs difficiles de l , comme des valeurs premières.

Enfin, nous avons essayé de déterminer si le produit $G_{\square}P_2$ est toujours R-AP lorsque G l’est. Si la question semble simple à traiter de prime abord, nous n’avons cependant pas réussi à y répondre. La principale raison derrière cette difficulté réside dans le fait que le produit par P_2 d’un graphe a tendance à être traçable, et donc trivialement R-AP, du fait du nombre non négligeable d’arêtes que possèdent les graphes produits relativement à leur nombre de sommets. Ajoutons, de plus, que la majorité des graphes R-AP connus à l’heure actuelle sont “presque traçables”, ce qui garantit systématiquement la traçabilité des graphes obtenus via leur produit par P_2 . Pour avancer sur la question, nous serons certainement dans l’obligation de trouver des graphes R-AP dont le produit par P_2 n’est pas traçable afin d’éventuellement trouver un contre-exemple ou d’en apprendre plus sur la préservation de la récursivité de la partition arbitraire du produit cartésien de graphes.

Annexe A

Algorithmes de vérification de la partition arbitraire

Nous présentons, dans cette annexe, les algorithmes que nous avons utilisés afin de déterminer la partition arbitraire de graphes appartenant à certaines des classes que nous avons été amenées à manipuler dans ce mémoire. Ceux-ci fonctionnent de manière assez similaire, à savoir qu'ils vérifient qu'un graphe G est arbitrairement partitionnable en s'assurant que toute séquence τ admissible pour son ordre y est bien réalisable. Cette vérification étant très coûteuse lorsqu'elle est effectuée exhaustivement, nous avons utilisé divers arguments pour la simplifier, basés notamment sur la réduction du nombre de séquences devant être testées ou sur l'existence systématique d'une réalisation de τ dans G ayant des propriétés bien particulières.

A.1 Cas des 3-podes

La structure que nous avons utilisée pour représenter un tripode en mémoire est la suivante :

Structure 3-pode
 [longueur des bras]
 a_1, a_2, a_3 : entiers ;
 [ordre total ($a_1 + a_2 + a_3 + 1$)]
 ordre : entier ;
Fin

Il a été montré que si une séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ est réalisable dans un multipode P , alors il existe une réalisation particulière R de τ dans P telle que la racine de ce dernier appartient au sous-ensemble de taille τ_k de R [1]. Dit autrement, cela signifie que si τ est réalisable dans P , alors il existe obligatoirement une réalisation R' de celle-ci dans ce graphe telle que le sous-ensemble de taille τ_1 de R' contienne des sommets de P situés sur l'extrémité de l'un de ses bras.

Sur ce principe, nous pouvons alors imaginer l'algorithme suivant permettant de vérifier si une séquence est réalisable dans un tripode donné.

Fonction : *est_réalisable*(pode : **3-pode**, seq : **séquence**) : booléen

[retourne vrai si la séquence <seq> est réalisable dans le tripode <pode>]

Si *pode.a₁ = 0 ou pode.a₂ = 0 ou pode.a₃ = 0* **alors**

 | **Retourner** vrai;

Sinon

 min : **entier**;

 reste : **séquence**;

 min ← seq.min;

 reste ← seq \ {min};

Si (*pode.a₁ + pode.a₂ + 1 ≤ min*) ou (*pode.a₂ + pode.a₃ + 1 ≤ min*) ou (*pode.a₁ + pode.a₃ + 1 ≤ min*) **alors**

 | **Retourner** vrai;

Sinon

Si *pode.a₁ ≥ min* **alors**

 sub : **3-pode**;

 sub.a₁ ← pode.a₁ - min;

 sub.a₂ ← pode.a₂;

 sub.a₃ ← pode.a₃;

Si *est_réalisable(sub, reste)* **alors**

 | **Retourner** vrai;

Fin

Fin

Si *pode.a₂ ≥ min* **alors**

 sub : **3-pode**;

 sub.a₁ ← pode.a₁;

 sub.a₂ ← pode.a₂ - min;

 sub.a₃ ← pode.a₃;

Si *est_réalisable(sub, reste)* **alors**

 | **Retourner** vrai;

Fin

Fin

Si *pode.a₃ ≥ min* **alors**

 sub : **3-pode**;

 sub.a₁ ← pode.a₁;

 sub.a₂ ← pode.a₂;

 sub.a₃ ← pode.a₃ - min;

Si *est_réalisable(sub, reste)* **alors**

 | **Retourner** vrai;

Fin

Fin

Retourner faux;

Fin

Fin

Pour déterminer si un tripode d'ordre n est arbitrairement partitionnable, il suffit alors de s'assurer, grâce à la fonction précédente, que toute séquence admissible pour n y est réalisable. En réalité, il est possible de ne prouver cela que pour un nombre polynomial en n de séquences puisqu'il a été prouvé que quelque soit n , il existe un noyau $N(n)$ de séquences pour les tripodes d'ordre n , c'est-à-dire un ensemble de séquences telles que si $\tau \notin N(n)$ est admissible pour n et n'est pas réalisable dans un tripode P , alors il existe une séquence $\tau' \in N(n)$ non réalisable dans P [1].

Plus précisément, les séquences du noyau $N(n)$ sont les séquences de type $(q, \dots, q, q + 1, \dots, q + 1)$ ou (q, \dots, q, r) avec $r \in [0, q - 1]$, admissibles pour n .

La fonction suivante illustre la vérification de la partition arbitraire d'un tripode donné en utilisant la notion de noyau de séquences. Nous supposons, dans celle-ci, disposer de la fonction `noyau_tripodes(n : entier)` qui retourne l'ensemble des séquences du noyau $N(n)$.

Fonction : est_AP(pode : **3-pode**) : booléen

[retourne vrai si le tripode <pode> est arbitrairement partitionnable]

noyau : **liste de séquences** ;

noyau \leftarrow noyau_tripodes(pode.ordre) ;

Pour chaque *seq* : **séquence** \in *noyau* **faire**

Si \neg *est_réalisable*(pode, *seq*) **alors**

Retourner faux ;

Fin

Fin

Retourner vrai ;

A.2 Cas des 4-podes

Comme précédemment pour les tripodes, nous commençons par présenter la structure de données que nous avons utilisée pour représenter un 4-pode en mémoire :

Structure 4-pode

[longueur des bras]

a_1, a_2, a_3, a_4 : **entiers** ;

[ordre total ($a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 1$)]

 ordre : **entier** ;

Fin

Pour trouver une réalisation d'une séquence τ dans un 4-pode P , il est possible d'avoir recours au même principe que celui que nous avons utilisé pour les tripodes, à savoir que si τ est réalisable dans P alors il en existe nécessairement une réalisation particulière dont le sous-ensemble le plus petit contient des sommets situés sur l'extrémité de l'un des bras de P . La fonction suivante illustre l'utilisation de cette propriété :

Fonction : `est_réalisable(pode : 4-pode, seq : séquence) : booléen`

[retourne vrai si la séquence <seq> est réalisable dans le 4-pode <pode>]

Si `pode.a1 = 0` ou `pode.a2 = 0` ou `pode.a3 = 0` ou `pode.a4 = 0` **alors**

Si `pode.a1 = 0` **alors**

 sub : **3-pode** ;

 sub.a₁ ← `pode.a2` ;

 sub.a₂ ← `pode.a3` ;

 sub.a₃ ← `pode.a4` ;

Si `est_réalisable(sub, seq)` **alors**

 | **Retourner** vrai ;

Fin

Fin

Si `pode.a2 = 0` **alors**

 sub : **3-pode** ;

 sub.a₁ ← `pode.a1` ;

 sub.a₂ ← `pode.a3` ;

 sub.a₃ ← `pode.a4` ;

Si `est_réalisable(sub, seq)` **alors**

 | **Retourner** vrai ;

Fin

Fin

Si `pode.a3 = 0` **alors**

 sub : **3-pode** ;

 sub.a₁ ← `pode.a1` ;

 sub.a₂ ← `pode.a2` ;

 sub.a₃ ← `pode.a4` ;

Si `est_réalisable(sub, seq)` **alors**

 | **Retourner** vrai ;

Fin

Fin

Si `pode.a4 = 0` **alors**

 sub : **3-pode** ;

 sub.a₁ ← `pode.a1` ;

 sub.a₂ ← `pode.a2` ;

 sub.a₃ ← `pode.a3` ;

Si `est_réalisable(sub, seq)` **alors**

 | **Retourner** vrai ;

Fin

Fin

Fin

Sinon

```

min : entier ;
reste : séquence ;
min ← seq.min ;
reste ← seq \ {min} ;

```

Si $(pode.a_1 + pode.a_2 + pode.a_3 + 1 \leq min)$ ou $(pode.a_1 + pode.a_2 + pode.a_4 + 1 \leq min)$ ou $(pode.a_1 + pode.a_3 + pode.a_4 + 1 \leq min)$ ou $(pode.a_2 + pode.a_3 + pode.a_4 + 1 \leq min)$ **alors**

```

| Retourner vrai ;

```

Sinon

```

Si  $pode.a_1 \geq min$  alors
  sub : 4-pode ;
  sub.a1 ← pode.a1 - min ;
  sub.a2 ← pode.a2 ;
  sub.a3 ← pode.a3 ;
  sub.a4 ← pode.a4 ;
  Si est_réalisable(sub, reste) alors
    | Retourner vrai ;
  Fin

```

Fin

```

Si  $pode.a_2 \geq min$  alors
  sub : 4-pode ;
  sub.a1 ← pode.a1 ;
  sub.a2 ← pode.a2 - min ;
  sub.a3 ← pode.a3 ;
  sub.a4 ← pode.a4 ;
  Si est_réalisable(sub, reste) alors
    | Retourner vrai ;
  Fin

```

Fin

```

Si  $pode.a_3 \geq min$  alors
  sub : 4-pode ;
  sub.a1 ← pode.a1 ;
  sub.a2 ← pode.a2 ;
  sub.a3 ← pode.a3 - min ;
  sub.a4 ← pode.a4 ;
  Si est_réalisable(sub, reste) alors
    | Retourner vrai ;
  Fin

```

Fin

```

Si  $pode.a_4 \geq min$  alors
  sub : 4-pode ;
  sub.a1 ← pode.a1 ;
  sub.a2 ← pode.a2 ;
  sub.a3 ← pode.a3 ;
  sub.a4 ← pode.a4 - min ;
  Si est_réalisable(sub, reste) alors
    | Retourner vrai ;
  Fin

```

Fin

```

Retourner faux ;

```

Fin
Fin

Il a été prouvé [2] qu'un 4-pode $P(a_1, a_2, a_3, a_4)$ d'ordre n est arbitrairement partitionnable ssi :

- $a_1 = 1$,
- toutes les séquences du noyau $N(n)$ sont réalisables dans celui-ci,
- le 3-pode $P(a_2, a_3, a_4)$ est AP.

Grâce à cette caractérisation et aux fonctions que nous avons définies précédemment, nous pouvons donner un algorithme permettant de vérifier la partition arbitraire d'un 4-pode :

Fonction : est_AP(pode : 4-pode) : booléen

[retourne vrai si le 4-pode <pode> est arbitrairement partitionnable]

sub : 3-pode ;

sub.a₁ ← pode.a₂ ;

sub.a₂ ← pode.a₃ ;

sub.a₃ ← pode.a₄ ;

Si $\neg (a_1 = 1 \text{ et } \text{est_AP}(\text{sub}))$ **alors**

 | **Retourner** faux ;

Sinon

 noyau : liste de séquences ;

 noyau ← noyau_tripodes(pode.ordre) ;

Pour chaque seq : séquence \in noyau **faire**

 | **Si** $\neg \text{est_réalisable}(\text{pode}, \text{seq})$ **alors**

 | **Retourner** faux ;

 | **Fin**

 | **Fin**

Retourner vrai ;

Fin

A.3 Cas des 4-ballons

Au même titre que pour les deux classes de graphes étudiées précédemment, la structure d'un 4-ballon est très naturelle à implémenter :

Structure 4-ballon

 | *[longueur des branches]*

 | b_1, b_2, b_3, b_4 : entiers ;

 | *[ordre total ($b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + 2$)]*

 | ordre : entier ;

Fin

Pour vérifier qu'une séquence $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ est réalisable dans un 4-ballon B , il est possible de se servir d'un résultat que nous avons donné dans ce mémoire, à savoir la Conséquence 7 (page 52). En effet, comme B est biconnexe, celle-ci nous indique que si τ est réalisable dans celui-ci, alors il en existe une réalisation particulière dont le plus grand ensemble de sommets contient la racine r_1 de B . Dit autrement, cela signifie qu'il est possible de trouver un ensemble $S \subseteq V$ tel que $|S| = \tau_k$, $r_1 \in S$, et la séquence $\tau \setminus \{\tau_k\}$ soit réalisable dans $B[V \setminus S]$.

Fonction : $\text{est_réalisable}(\text{bal} : \mathbf{4\text{-ballon}}, \text{seq} : \mathbf{séquence}) : \text{booléen}$

[retourne vrai si la séquence $\langle \text{seq} \rangle$ est réalisable dans le 4-ballon $\langle \text{bal} \rangle$]

max : entier ;

reste : séquence ;

max \leftarrow seq.max ;

reste \leftarrow seq \setminus {max} ;

Si $\text{bal}.b_1 = \text{max}$ ou $\text{bal}.b_2 = \text{max}$ ou $\text{bal}.b_3 = \text{max}$ ou $\text{bal}.b_4 = \text{max}$ **alors**

| **Retourner** vrai ;

Fin

Sinon si $(\text{bal}.b_1 + \text{bal}.b_2 + 1 \leq \text{max})$ ou $(\text{bal}.b_1 + \text{bal}.b_3 + 1 \leq \text{max})$ ou $(\text{bal}.b_1 + \text{bal}.b_4 + 1 \leq \text{max})$ ou $(\text{bal}.b_2 + \text{bal}.b_3 + 1 \leq \text{max})$ ou $(\text{bal}.b_2 + \text{bal}.b_4 + 1 \leq \text{max})$ ou $(\text{bal}.b_3 + \text{bal}.b_4 + 1 \leq \text{max})$ **alors**

| **Retourner** vrai ;

Fin

Sinon

| **a, b, c, d** : entiers ;

| **Pour** a de 0 à $\text{bal}.b_1$ **faire**

| | **Pour** b de 0 à $\min\{\text{max}-a, \text{bal}.b_2\}$ **faire**

| | | **Pour** c de 0 à $\min\{\text{max}-(a+b), \text{bal}.b_3\}$ **faire**

| | | | **d** \leftarrow max - (a + b + c) ;

| | | | **Si** $a \neq \text{bal}.b_1$ et $b \neq \text{bal}.b_2$ et $c \neq \text{bal}.b_3$ et $d \neq \text{bal}.b_4$ **alors**

| | | | | **sub** : 4-pode ;

| | | | | sub.a₁ \leftarrow $\text{bal}.b_1 - a$;

| | | | | sub.a₂ \leftarrow $\text{bal}.b_2 - b$;

| | | | | sub.a₃ \leftarrow $\text{bal}.b_3 - c$;

| | | | | sub.a₄ \leftarrow $\text{bal}.b_4 - d$;

| | | | | **Si** $\text{est_réalisable}(\text{sub}, \text{reste})$ **alors**

| | | | | | **Retourner** vrai ;

| | | | | **Fin**

| | | **Fin**

| | **Sinon**

| | | **Si** $a = \text{bal}.b_1$ **alors**

| | | | **sub** : 3-pode ;

| | | | sub.a₁ \leftarrow $\text{bal}.b_2 - b$;

| | | | sub.a₂ \leftarrow $\text{bal}.b_3 - c$;

| | | | sub.a₃ \leftarrow $\text{bal}.b_4 - d$;

| | | | **Si** $\text{est_réalisable}(\text{sub}, \text{reste})$ **alors**

| | | | | **Retourner** vrai ;

| | | | **Fin**

| | **Fin**

| | *[... puis vérifier la même chose pour les trois autres cas ...]*

| | **Retourner** faux ;

| **Fin**

| **Fin**

| **Fin**

| **Fin**

Fin

Finalement, en supposant que l'on dispose de la fonction *partitions*(n : *entier*) qui retourne l'intégralité des séquences formant une partition d'un entier n donné, on peut vérifier la partition arbitraire d'un 4-ballon de la manière suivante :

Fonction : *est_AP*(bal : **4-ballon**) : booléen

[retourne vrai si le 4-ballon <bal> est arbitrairement partitionnable]

parts : **liste de séquences** ;

parts \leftarrow *partitions*(bal.ordre) ;

Pour chaque *seq* : *séquence* \in *parts* **faire**

Si \neg *est_réalisable*(bal, *seq*) **alors**

 | **Retourner** faux ;

Fin

Fin

Retourner vrai ;

Bibliographie

- [1] D. BARTH, O. BAUDON et J. PUECH : Decomposable trees : a polynomial algorithm for tripodes. *Discrete applied mathematics*, 119(3):205–216, July 2002.
- [2] D. BARTH et H. FOURNIER : A degree bound on decomposable trees. *Discrete Mathematics*, 306(5):469–477, 2006.
- [3] O. BAUDON, F. FOUCAUD, A. MARCZYK, J. PRZYBYŁO et M. WOŹNIAK : Communication privée, 2010.
- [4] O. BAUDON, F. GILBERT et M. WOŹNIAK : Recursively arbitrarily vertex-decomposable graphs. *Soumis à Discrete Mathematics, special issue 8th French Conference on Combinatorics*, October 2010.
- [5] O. BAUDON, F. GILBERT et M. WOŹNIAK : Recursively arbitrarily vertex-decomposable suns. *À paraître dans Opuscula Mathematica*, 2010.
- [6] J. A. BONDY et U. S. R. MURTY : *Graph Theory with Applications*. New York, North Holland, 1976.
- [7] R. DIESTEL : *Graph Theory*. Springer, August 2005.
- [8] P. FLAJOLET et R. SEDGEWICK : *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [9] F. GILBERT : Graphes arbitrairement décomposables. Mémoire de D.E.A., Université Bordeaux 1, 2007.
- [10] E. GYŐRI : On division of graphs to connected subgraphs. *In Combinatorics*, pages 485–494, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 18, 1978.
- [11] M. HORŇÁK, Z. TUZA et M. WOŹNIAK : On-line arbitrarily vertex decomposable trees. *Discrete Applied Mathematics*, 155:1420–1429, 2007.
- [12] M. HORŇÁK et M. WOŹNIAK : Arbitrarily vertex decomposable trees are of maximum degree at most six. *Opuscula Mathematica*, 23:49–62, 2003.
- [13] W. IMRICH et S. KLAVŽAR : *Product Graphs : Structure and Recognition*. Wiley, 2000.
- [14] R. KALINOWSKI, M. PILSNIAK, M. WOŹNIAK et I. A. ZIOŁO : On-line arbitrarily vertex decomposable suns. *Discrete Mathematics*, 2008. doi :10.1016/j.disc.2008.11.025.
- [15] L. LOVÁSZ : A homology theory for spanning trees of a graph. *Acta mathematica academiae scientiarum Hungaricae*, 30(3-4):241–251, 1977.
- [16] A. MARCZYK : An ore-type condition for arbitrarily vertex decomposable graphs. *Discrete Mathematics*, 309(11):3588–3594, 2009.
- [17] R. RAVAUX : *Graphes arbitrairement partitionnables : propriétés structurelles et algorithmiques*. Thèse de doctorat, Université de Versailles Saint-Quentin, 2009.
- [18] R. RAVAUX : Decomposing trees with large diameter. *Theoretical computer science*, 411:3068–3072, July 2010. doi :10.1016/j.tcs.2010.04.032.

- [19] M. ROBSON : Communication privée, 1998.
- [20] G. SABIDUSSI : Graphs with given group and given graph-theoretical properties. *Canadian journal of mathematics*, 9:515–525, 1957.
- [21] W. T. TUTTE : A theory of 3-connected graphs. *Indagationes Mathematicae*, 23:441–455, 1961.